جامعة دمشق
كلية الهندســـــة الميـكانيكية
والكهــربائية
قسم هندسة السيارات والآليات الثقيلة

محاضرات

النمذجة والمحاكاة في النظم الميكانيكية

Modeling & Simulation in Mechanical Systems

اعداد
الدكتور: فراس القطان

العام الدراسي
1443–1444هـ
2022–2023م

Dr. Feras ALKATAN

نمذجة ومحاكاة النظم الميكانيكية

Modeling and Simulation the mechanical systems

السنة الرابعة آليات

الدكتور فراس القطان

توزيع المقرر

يتوزع مقرر نمذجة ومحاكاة النظم الميكانيكية على 6 ساعات أسبوعية

- نظري
  ساعتان
- مسائل
  ساعتان
- مخبر ماتلاب
  ساعتان لكل فئة

نمذجة ومحاكاة النظم الميكانيكية

أهداف المقرر

1. أن يتعرف الطالب على أهمية النمذجة كوظيفة هندسية وعلى أهم طرق النمذجة والمحاكاة،
2. أن يميز الطالب بين النماذج الرياضية من حيث درجة الدقة والمطابقة ومجالات الاستخدام،
3. أن يصبح الطالب قادرا على وضع النماذج الرياضية للنظم الميكانيكية المختلفة،
4. أن يصبح الطالب قادرا على ربط نماذج النظم التي تعمل معا ومعالجتها رياضيا وحاسوبيا باستخدام أدوات برمجية مناسبة،
5. أن يصبح الطالب قادرا على استخدام النماذج الرياضية في حل المسائل الهندسية.
6. الاستفادة من النماذج في تحليل استجابة منظومات التحكم الآلي ودراستها وفي التعرف على أهم أنماط العناصر الأساسية في هذه المنظومات

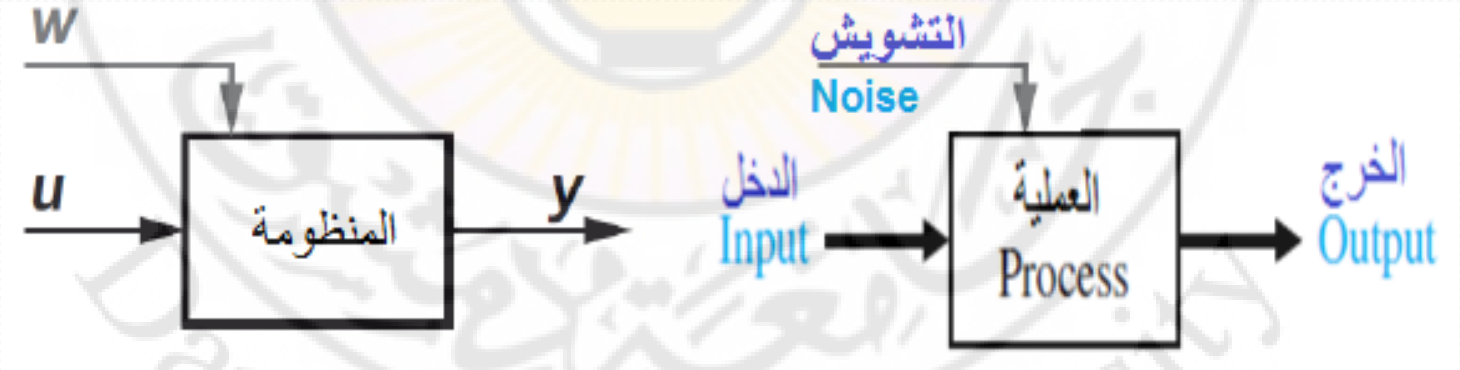
موقع المقرر

- يشترط مقرر النمذجة في الهندسة الميكانيكية توفر معارف أساسية في:
  - ✓ الرياضيات المتقدمة
  - ✓ الفيزياء
  - ✓ المقررات الأساسية الاختصاصية مثل الحركة والتحريك والترموديناميك وميكانيك الموائع وأسس الهندسة الكهربائية وعناصر الآلات والآلات الحرارية وغيرها.

- يؤسس لمقررات أخرى مثل دراسة وتحليل النظم وبالأخص نظم التحكم الآلي، والتصميم والتصنيع الميكانيكي، وخطط الإنتاج، ومراحل الدراسات العليا على وجه العموم

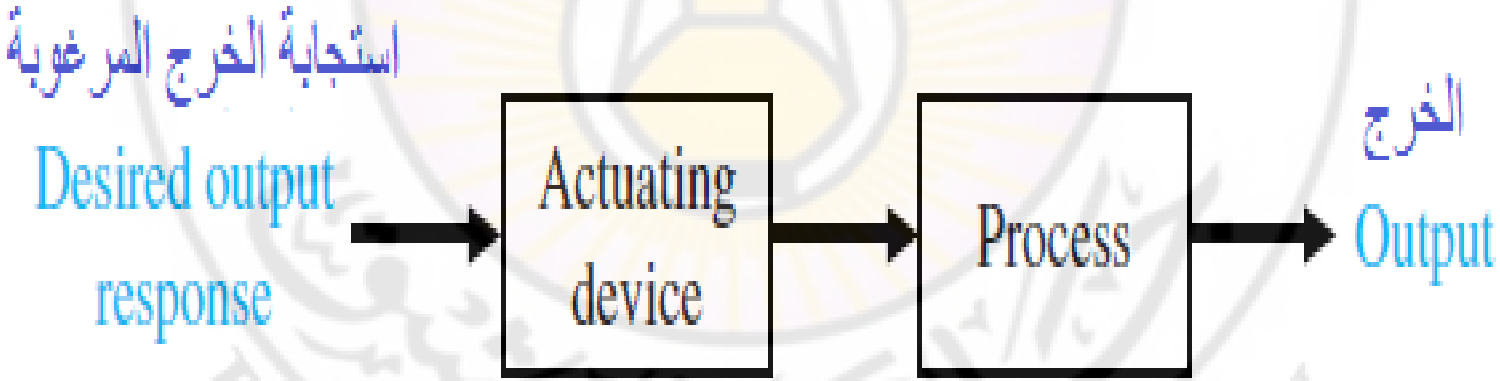
المنظومة : هي مجموعة من المكونات تتبادل التأثير فيما بينها لتؤدي وظيفة أو غاية معينة

منظومة التحكم: هي جملة مكونات مترابطة لتشكل توليفة منظوماتية تؤمن تحقيق الاستجابة المرغوبة وتكون إما **مفتوحة** أو **مغلقة**



منظومة التحكم المفتوحة

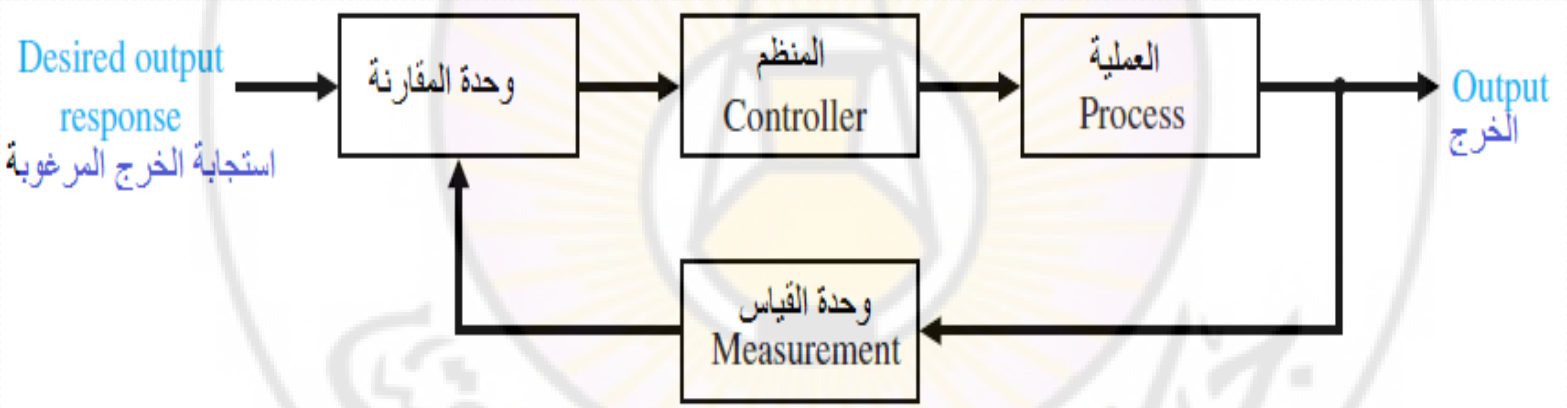
تعتمد منظومة التحكم المفتوحة open-loop control system، وهي منظومة بدون تغذية راجعة، على منظم controller أو مشغل تحكمي control actuator من أجل الحصول على الاستجابة المرغوبة



أي أن منظومة التحكم المفتوحة تقوم بتنفيذ برنامج تحكم يحدده المنظم دون التحقق من وجود انحراف بين القيمتين الفعلية والمرغوبة لإشارة الخرج

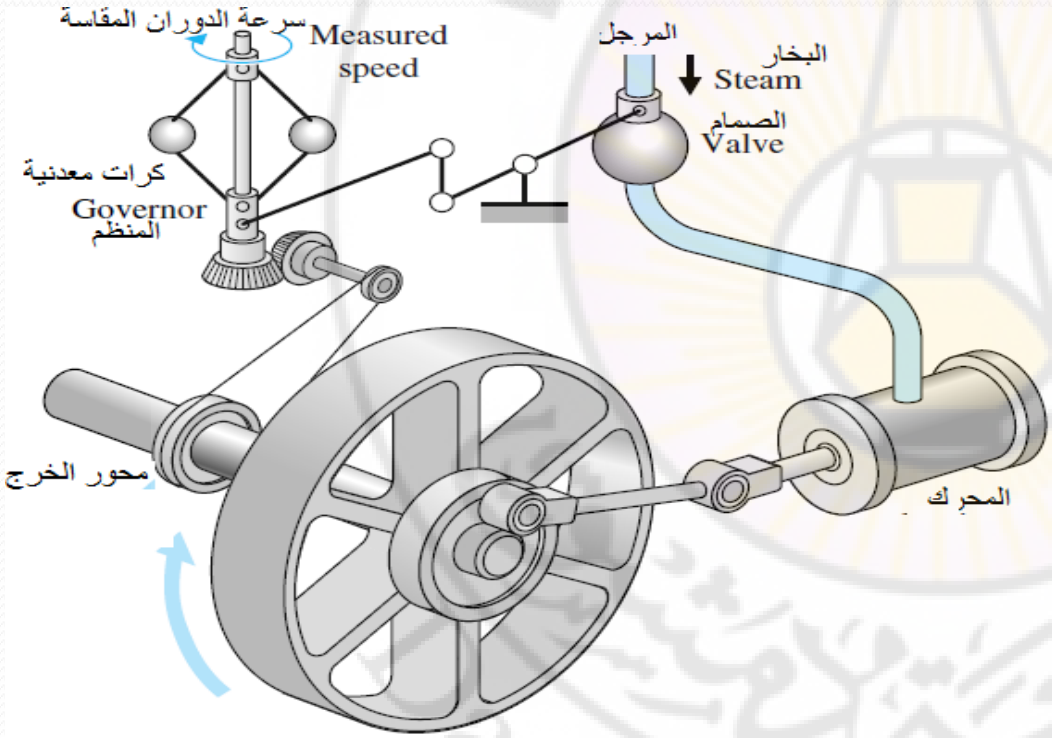
منظومة التحكم المغلقة

تستفيد منظومة التحكم المغلقة من إجراء عملية قياس للخرج الحقيقي لمقارنته مع استجابة الخرج المرغوبة. تسمى عملية القياس تلك إشارة الرابطة الراجعة أو التغذية العكسية



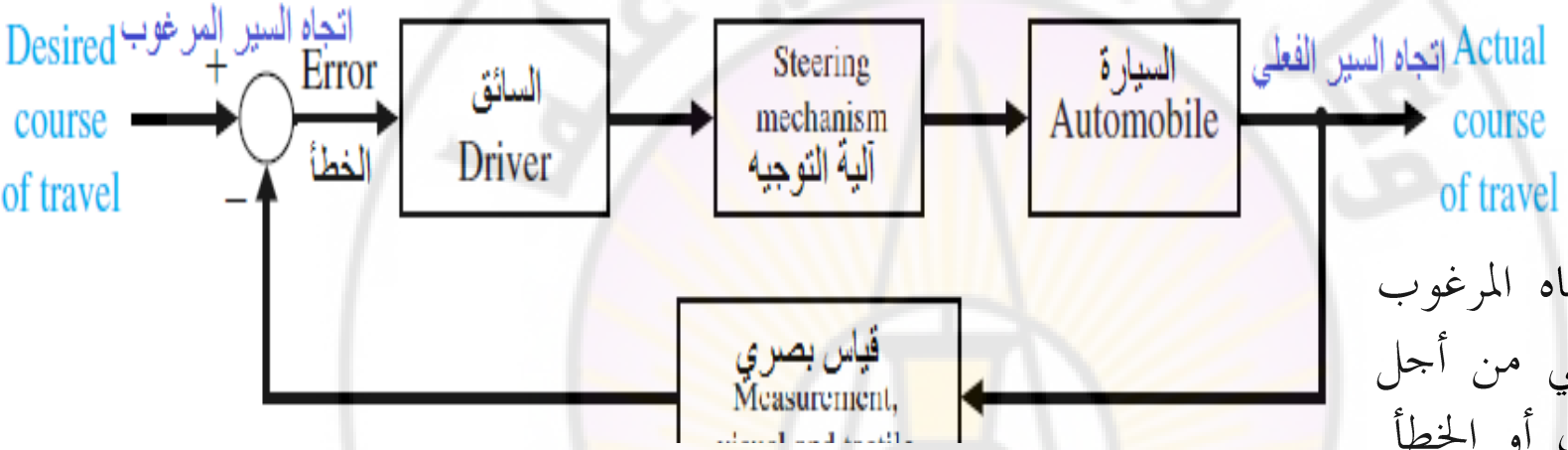
إن منظومة التحكم المغلقة تستخدم قياس الخرج والرابطة الراجعة الناتجة عن هذه الإشارة لتقارنها مع الخرج المرغوب (الإشارة المرجعية أو القائدة)

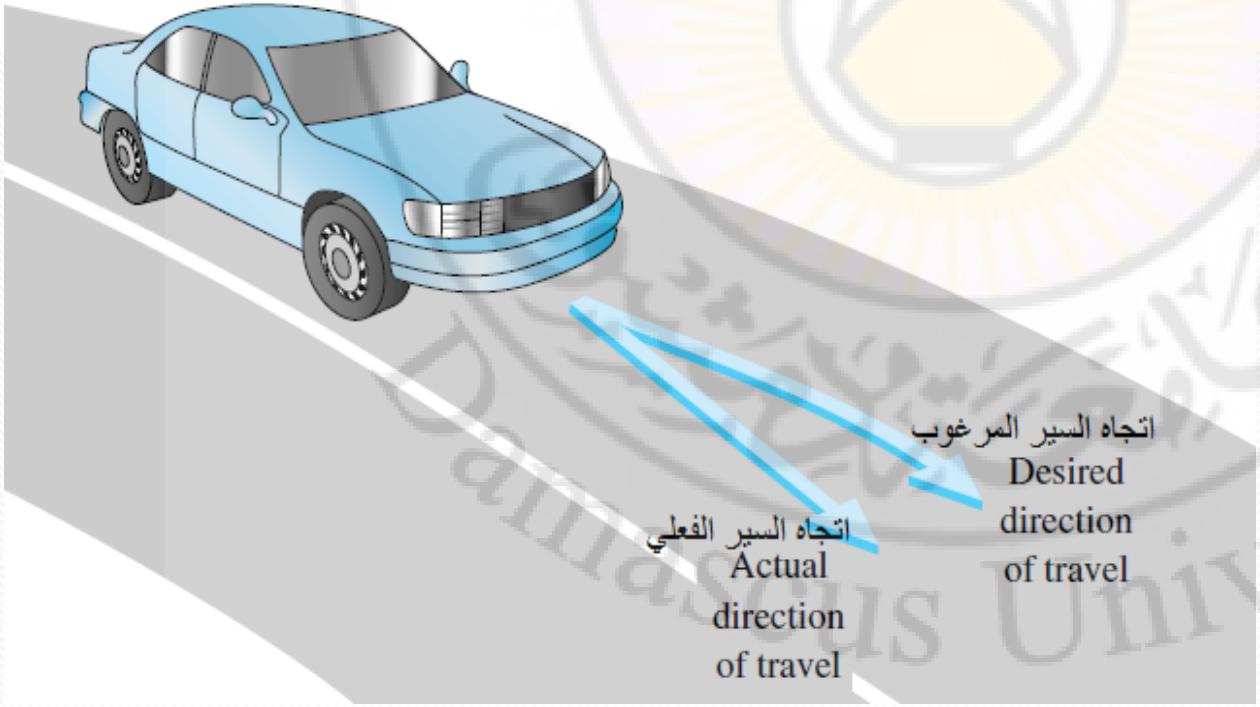
أمثلة



لقد كان منظم الأوزان النابذية Fly-ball governor الذي صممه جيمس واط في 1769 أول منظم ذي رابطة راجعة للتحكم بسرعة المحرك البخاري. يقوم المنظم الميكانيكي الصرف بقياس سرعة دوران محور الخرج ويستفيد من حركة الأوزان النابذية للتحكم بكمية البخار الداخلة إلى المحرك عبر التحكم بالصمام. مع تزايد السرعة تتباعد الأوزان عن محور دورانها وتؤدي إلى إغلاق الصمام (أو تقليل مساحة فتحته).

مثال منظومة التحكم باتجاه سير السيارة

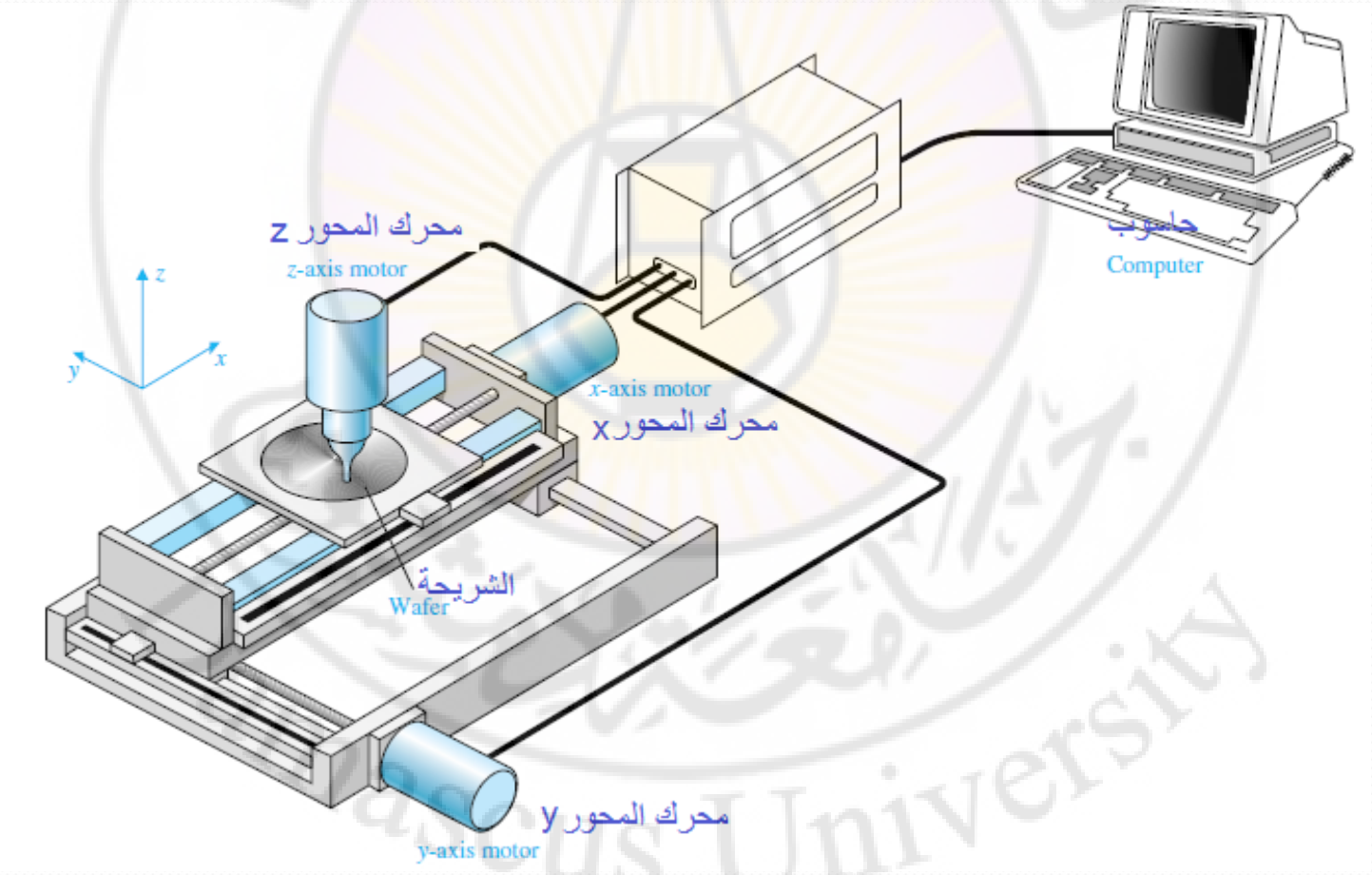




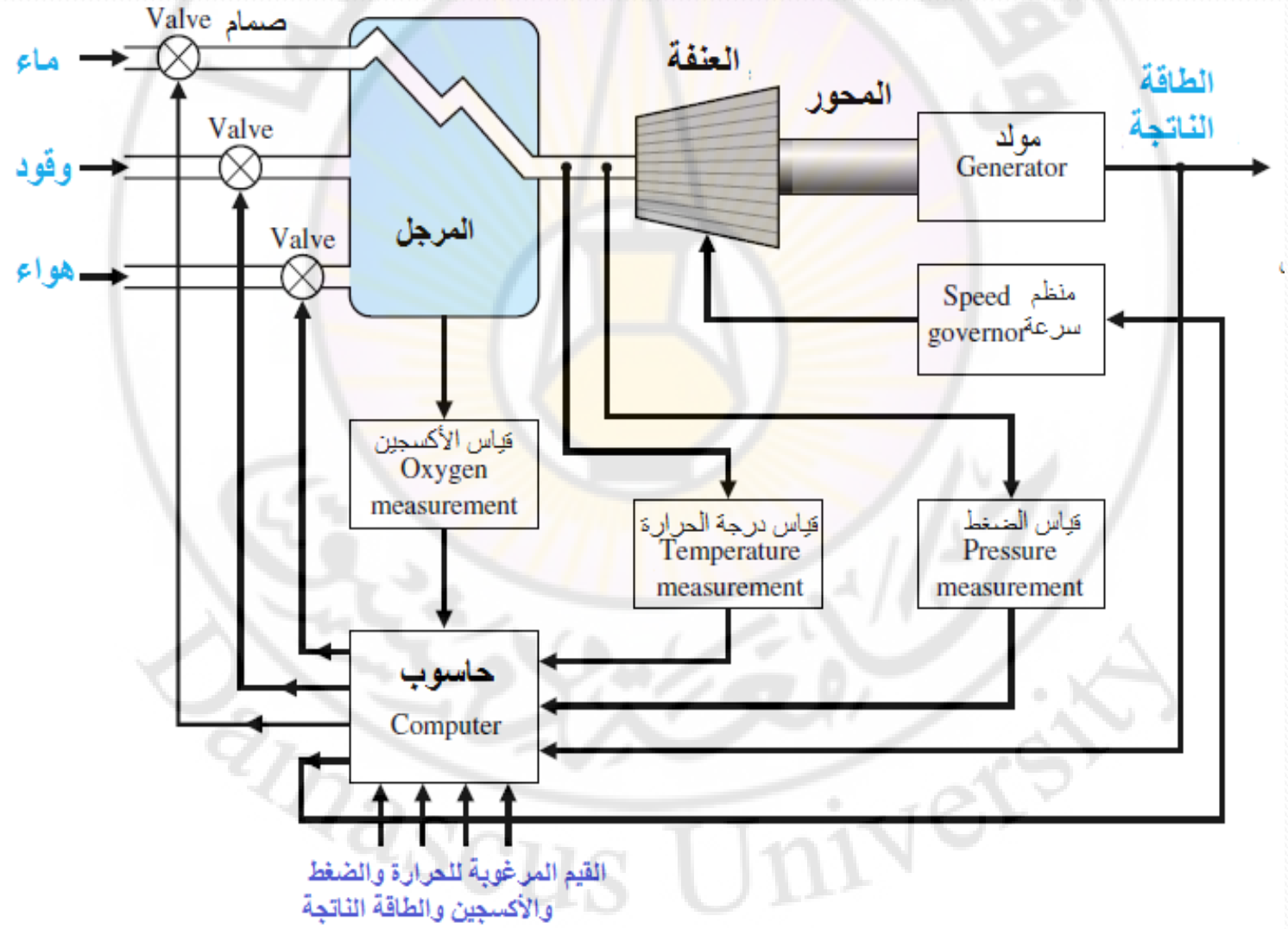
تتم مقارنة الاتجاه المرغوب مع الاتجاه الفعلي من أجل توليد قيمة الفرق أو الخطأ (Error)

يتم هذا القياس بواسطة رابطة راجعة بصرية. وهناك رابطة راجعة إضافية من خلال الإحساس بعجلة القيادة باليدين عن طريق حساس (Sensor)..

منظومة تحكم آلية ثلاثية المحاور لتفحص خلايا أنصاف النواقل



منظومة تحكم متعددة البارامترات بمولد عنفة بخارية:



النمذجة (modelling) :

عملية إبداعية تهدف إلى تطوير تصور هندسي محدد (نموذج) لغرض أو عملية ما (موضوع النمذجة) بشكل يعبر عن أهم خواصها ومواصفاتها من وجهة نظر المنمذج.

النموذج: هو توصيف غرضي محدود ومبسط لغرض حقيقي ما (منظومة أو عملية) يعبر عن أهم مميزاته وخواصه بما يخدم غاية محدودة ومحددة غالبا، وبدرجة دقة ومطابقة محددة تتفاوت حسب نوع النموذج.

المحاكاة (simulation):

هي عبارة عن حل النموذج الرياضي أو هي تجربة افتراضية يتم إجراؤها على النموذج الرياضي بهدف الحصول على معلومات . والمحاكاة وهي إحدى مراحل النمذجة وهي من أهم أهدافها.

أنواع النماذج

النموذج اللغوي : توصيف كلامي (تعاريف، رموز، مصطلحات ، مفاهيم عامة...)

النموذج البياني: (رسوم، صور، مخططات بيانية، مخططات وظيفية)

النموذج المادي (الفيزيائي): مجسمات، نماذج اختبارية أو تجريبية، نماذج حقيقية

النموذج الرياضي: (علاقات رياضية محددة بين إشارات الخرج وإشارات الدخل)

أهداف وغايات النمذجة

1. دعم عمليات التحليل و الدراسة لفهم أفضل لطبيعة و سلوك غرض النمذجة
2. دعم أعمال التطوير والتحسين
3. توفير قاعدة مشتركة للمناقشة والمقارنة و تبادل المعلومات
4. مقارنة الحلول المختلفة والبدائل المتاحة
5. التنبؤ بسلوك ومميزات النظم
6. تصميم عمليات و نظم التحكم الحديثة
7. التشخيص والمراقبة Diagnose and Monitoring
8. الأمثلة Optimisation
9. توفير جهود وزمن الاختبار والتصميم والصيانة (تقليل التكاليف)
10. تحاشي الخطورة (نمذجة الانفجارات النووية)
11. البحث في مسائل مستحيلة التطبيق في مكانها الفعلي والبعيدة المنال (عند العدو مثلا)
12. عزل تأثير الشروط المحيطة عن بعضها البعض
13. إجراء الاختبارات المختبرية والتجارب العملية الواقعية
14. للحفاظ على السرية
15. التعليم.

تصنيف المنظومات

المنظومة: هي مجموعة من العناصر التي تعمل مع بعضها البعض لتؤدي وظيفة محددة.
وتصنف المنظومات وفق العديد من المبادئ منها:

- **الخصائص المكانية Spatial characteristics**
- **استمرارية المتغيرات بالنسبة للزمن**
- **تغير المعاملات (البارامترات)**
- **تكميم المتغيرات التابعة Quantization of dependent variable**
- **مبدأ التحصيل الشامل super position principle**
- **الطبيعة**
- **بعد المنظومة**
- **الاستقرار**

تصنيف المنظومات

يمكن أن نجمل تصنيف المنظومات في الجدول التالي:

	Distributed موزعة	lumped مركزة	الخصائص المكانية Spatial characteristics
مختلطة	discrete–time متقطعة	مستمرة continuous	استمرارية المتغيرات بالزمن
	متغيرة	ثابتة (invariant)	تغير المعاملات (البارامترات)
	مكممة	غير مكممة	تكميم المتغيرات التابعة Quantization of dependent variable
	Non–linear لاخطية	خطية Linear	مبدأ التحصيل الشامل super position principle
	ستاتيكية	ديناميكية	الطبيعة
	متعددة الدخل و الخرج MIMO	أحادية الدخل والخرج SISO	بعد المنظومة
حيادية	غير مستقرة	مستقرة	الاستقرار

تصنيف المنظومات

في ختام استعراضنا لتصنيف المنظومات يجب أن ننوه إلى أن:

- المنظومات الفعلية تكاد تكون جميعها ديناميكية Dynamic، لاخطية non-linear، متغيرة البارامترات time-variant، وهي في الغالب مستمرة continious وموزعة (يمكن اعتبارها مركزة lumped ببعض التبسيط خاصة بالنسبة للمنظومات قليلة الأبعاد أو التي تتحرك بسرعات قليلة نسبيا).

- يتعلق هذا التصنيف بالنماذج التي توصف هذه المنظومات وليس بالمنظومات نفسها.

- في مقررنا الحالي سوف نقتصر على دراسة المنظومات الخطية الثابتة زمنيا LIT linear time-invariant systems

النمذجة الرياضية

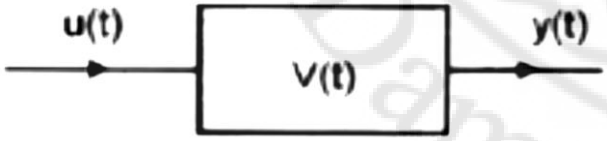
إذا كان من الممكن التعبير عن السلوك الديناميكي لمنظومة فيزيائية ما بمعادلة أو بجملة معادلات، فإن هذه المعادلة أو جملة المعادلات تسمى نموذجا رياضيا للمنظومة.

- يمكن بناء هذه النماذج على أساس معرفة المميزات الفيزيائية للمنظومة،
- أو تحديد النموذج الرياضي عن طريق التجارب بقياس استجابة خرج المنظومة على إشارات دخل معلومة،

طرق النمذجة الرياضية

1- النمذجة النظرية: (صندوق أبيض)

- تعتمد على معادلات التوازن الفيزيائية بين القوى والكتل والطاقات
- نتيجتها نماذج بارامترية فيزيائية ونماذج الحالة.
- إيجابيات الطريقة: تعكس بنية المنظومة بشكل جيد وهناك توفيق بين البارامترات ومكونات المنظومة.
- سلبيات الطريقة: ضرورة تحديد البارامترات، يتأثر النموذج بتغير التشويش، لا يأخذ تغير مواصفات المنظومة مع الزمن في الحسبان.



$$\frac{dV(t)}{dt} = u(t) - y(t)$$

طرق النمذجة الرياضية

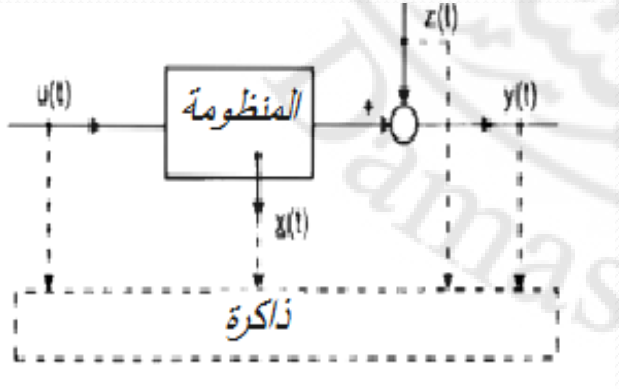
2- النمذجة التجريبية (صندوق أسود) لا تهتم بتفاصيل البنية الداخلية للمنظومة.

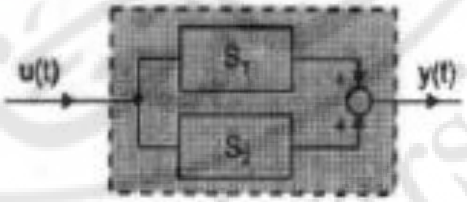
- تعتمد على تنفيذ تجارب على المنظومة مع تسجيل بارامترات المنظومة $u(t), z(t), x(t)$.

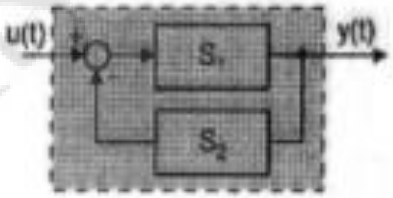
- نتيجتها نموذج دخل – خرج أو نموذج حالة.

- إيجابيات الطريقة: يمكن تحديد أو تخمين قيم بارامترات المنظومة ، يمكن أخذ التغيرات مع الزمن في الحسبان، النموذج يبنى في ظروف الواقع.

- سلبيات الطريقة: لا تهتم ببنية المنظومة، يصعب التوفيق بين البارامترات والمكونات، يجب إجراء التجارب على المنظومة مباشرة (جهد وتكلفة وجهد لتقييم نتائج القياس)







طرق النمذجة الرياضية

3- النمذجة النمذجة المختلطة (صندوق رمادي)

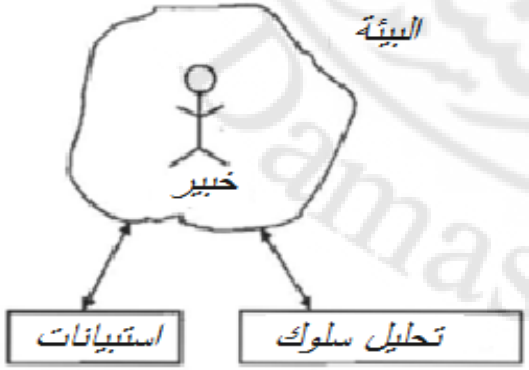
4- النمذجة المبنية على إفادات الخبراء (بالتعلم)

- تعتمد على استبيان آراء الخبراء وتحليل طرق تعاملهم مع المنظومة

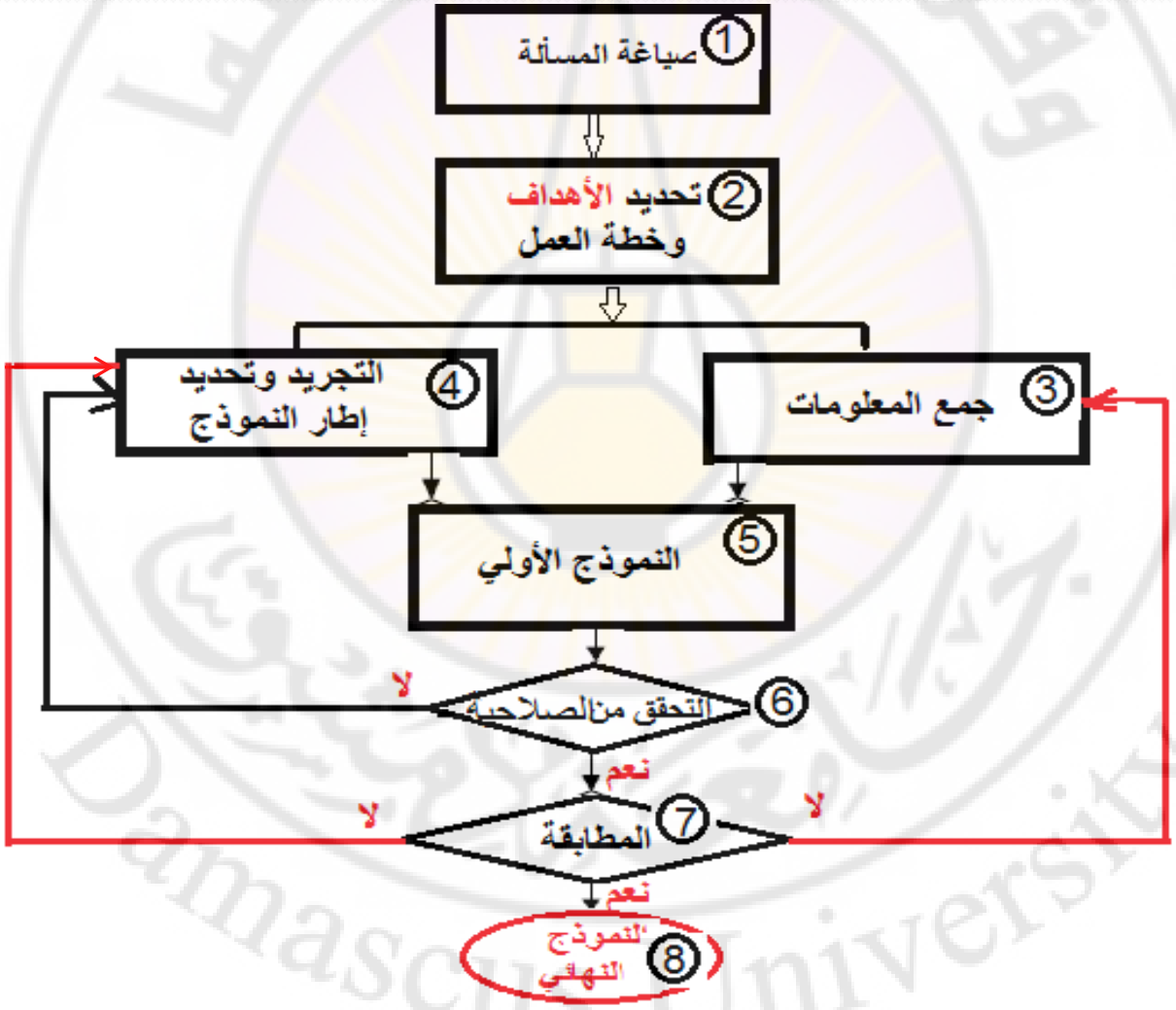
- نتيجتها نموذج لغوي أو كيفي qualitative (غير كمي).

- إيجابيات الطريقة: جهد أقل، تعكس الطبيعة الحقيقية للمنظومة.

- سلبيات الطريقة: تتعلق بمستوى الخبراء و بمستوى المنمذج وجودة الاستبيان، ذاتية (غير موضوعية)، و تشترط أن يكون هناك خبرة في التعامل مع المنظومة (التقانات و المنتجات الحديثة؟؟)



مراحل النمذجة الرياضية



تصنيف النماذج الرياضية

- **حسب التقانة المستخدمة**

أ – تقليدي تشابهي (مستمر) ب – رقمي حاسوبي (متقطع)

- **حسب الجهاز الرياضي (الصيغة الرياضية)**

أ – معادلات تفاضلية ب– توابع التحويل

ج– معادلات فضاء الحالة د– نموذج غائم

ه – نموذج احتمالاتي

- **حسب الغاية**

أ– تنبؤي ب – تشخيصي

ج – تحليلي

- **حسب شموليته:**

أ– عام يتعامل مع خرج ودخل الغرض أو المنظومة بغض النظر عن تفاصيلها

ب – مفصل يتألف من دمج نماذج عناصر المنظومة

ووفقا لمبادئ تصنيف أخرى نجد نماذج إما مستمرة أو متقطعة و إما عشوائية أو تحديدية و غير ذلك...

الأجهزة الرياضية المستخدمة في النمذجة الرياضية

✓علاقات رياضية (معادلات و متراجحات)

$$E = mc^2, \quad w^T x \le 10$$

✓جملة معادلات تفاضلية عادية

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0$$

$$\dot{y}(t) = y(t)$$

$$\dot{x}(t) = -mx(t) + ay(t) + c$$

$$\dot{y}(t) = bx(t) - ny(t) + d$$

✓جملة معادلات تفاضلية جزئية

(تشوه غشاء مشدود من حافته تحت تأثير ثقل f)

$$u_{xx} + u_{yy} = f \quad for \quad (x, y) \in \Omega$$

$$u = 0 \quad for \quad (x, y) \in \delta\Omega$$

✓التوزعات الاحتمالاتية (التشويش في نظم التحكم، الضجيج ..)

✓المنطق الترجيحي Fuzzy logic

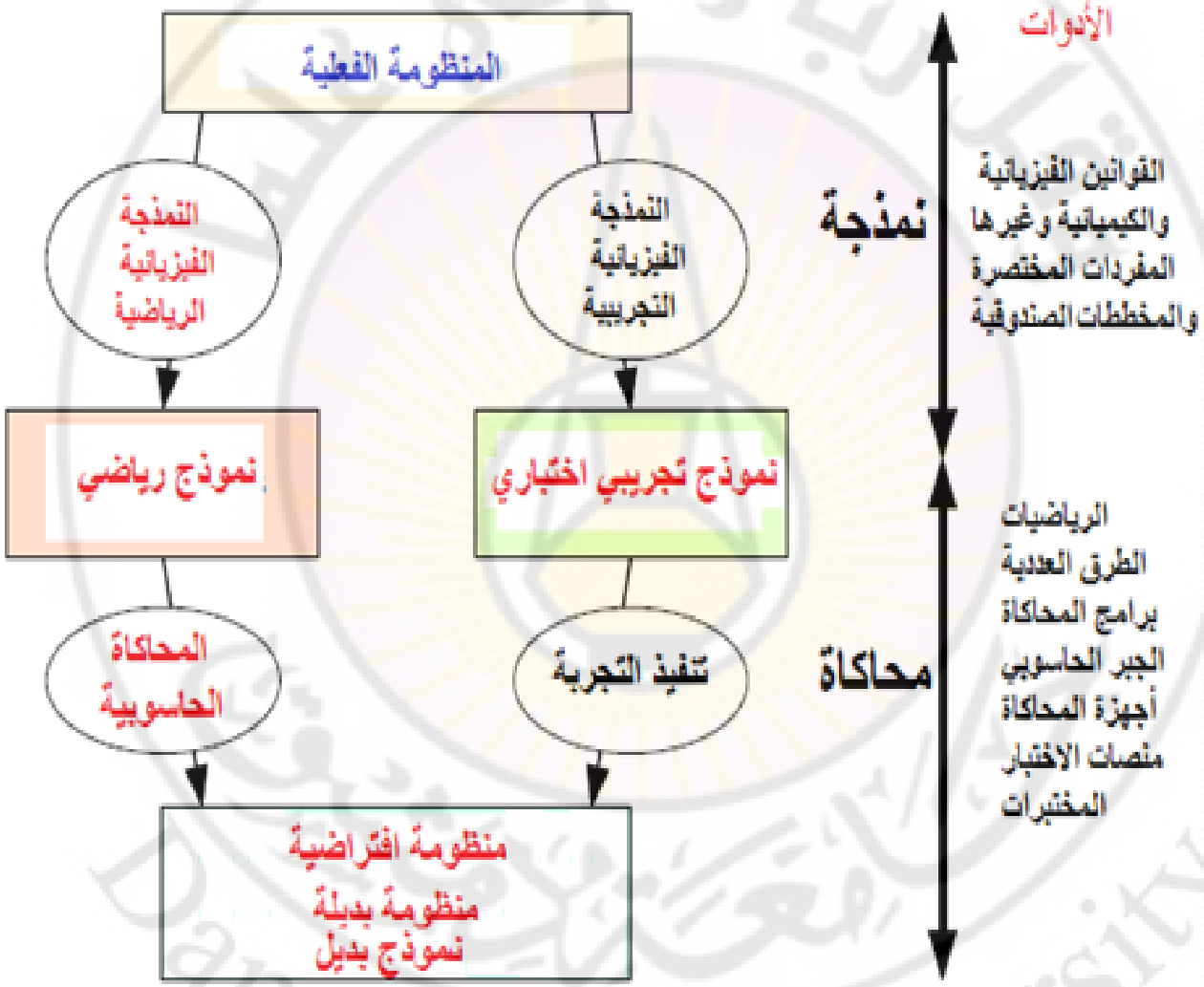
✓الشبكات العصبونية

✓البنى الجبرية (مجموعات الميكانيك الكمومي، الأجسام المنتهية في الكريبتولوجيا)

العلاقة بين النمذجة والمحاكاة

المحاكاة هي تجربة يتم إجراؤها على النموذج بهدف الحصول على مزيد من المعلومات حول العمليات التي تجري فيه. هذه التجربة قد تكون:

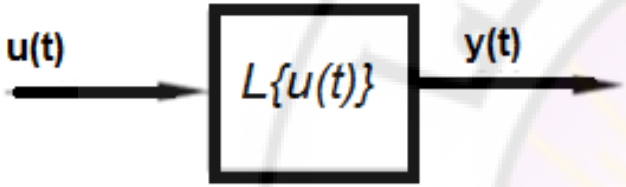
- مخبرية يتم إجراؤها على نموذج مخبري في المختبر بمقاييس قد تكون مختلفة عن المقاييس الفعلية وبتجهيزات تراعي متطلبات الدقة والوضوح والسلامة المهنية.
- واقعية اختبارية يتم تنفيذها على نموذج اختباري حقيقي مطابق للواقع قدر الإمكان
- رياضية يتم تنفيذها على الورق أو على الحاسوب بالاعتماد على النموذج الرياضي وباستخدام أدوات التحليل الرقمي المتاحة (المحاكاة الرقمية أو الحاسوبية)، وهي ما يشكل مكتسبا مهما من مكتسبات تقانة المعلوماتية في العلوم الهندسية، وهو موضوع مقررنا في إطار التدريب العملي على بيئة المتلاب والسيمولينك. هذا النوع من المحاكاة يمكن تعريفه بأنه عبارة عن تجربة افتراضية **vertual experiment** حاسوبية يتم إجراؤها على النموذج الرياضي بهدف الحصول على معلومات عن هذا النموذج وعن المنظومة الحقيقية التي يمثلها.



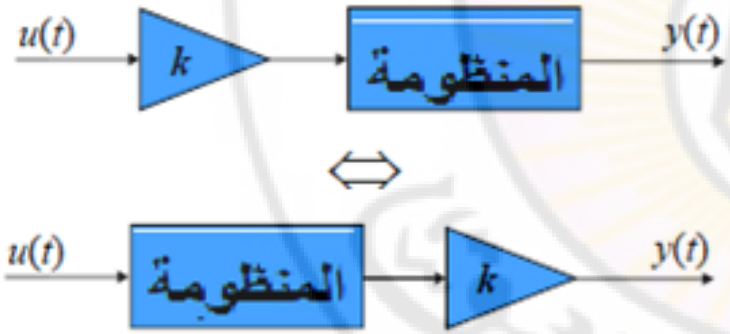
الحل الحاسوبي للمعادلات التفاضلية يعتمد الطرق المعروفة للحل ولكن بالصيغة المتقطعة discrete، غير أن العديد من الحزم البرمجية المتوفرة تقوم بعملية التقطيع تلقائيا وتسمح بإدخال هذه المعادلات بصيغتها المستمرة continuous form

مفهوم الخطية linearity

المنظومات الخطية هي تلك التي تخضع لمبدأي التجانس homoginity و التحصيل الشامل super position principle



المنظومات الخطية هي تلك المنظومات التي توصف بمعادلات خطية



I. مبدأ التجانس

هناك تناسب بين الدخل والخرج

أي تغيير في إشارة الدخل يقابلها نفس التغير في إشارة الخرج

رياضياً: إذا كانت المنظومة توصف العلاقة

$$y = f(u)$$

وكانت المنظومة تحقق العلاقة:

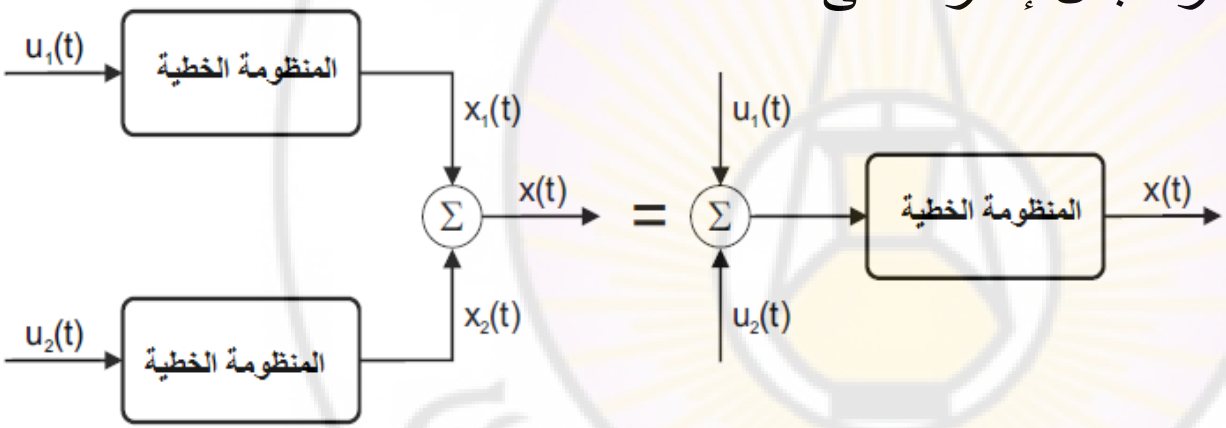
$$k \cdot y = k \cdot f(u) = f(ku)$$

كان مبدأ التجانس محققاً

مفهوم الخطية linearity

II.مبدأ التحصيل الشامل : إذا جمعنا إشارتي دخل يجب أن يكون خرج المنظومة ناتج جمع الخرج لكليهما كما لو أثرنا بكل إشارة على حدة

بيانياً:



رياضياً:

$$f(u_1+u_2)=f(u_1)+f(u_2)$$

يمكن التعبير عن كلا المبدأين بالعلاقة:

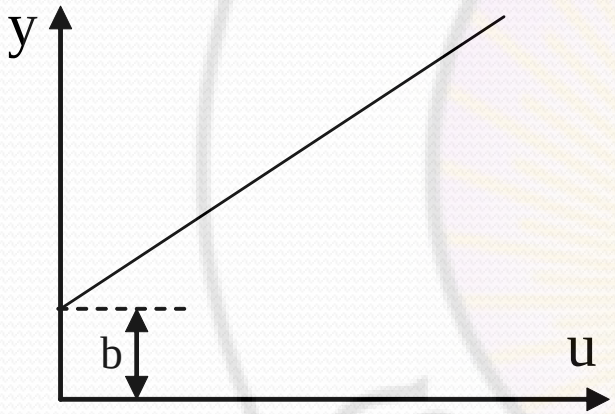
$$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot y_i(t)=f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot u_i(t)\right)$$

مفهوم الخطية inearity

في المخططات الصندوقية يرمز للعناصر الخطية بمستطيل ذي إطار أحادي، فيما يشار إلى العناصر غير الخطية بمستطيلات ذات إطار مزدوج.

أمثلة توضيحية

لتكن المنظومة المعبر عنها بالمعادلة: $y = u + b$



المنظومة لا تحقق شرط التجانس

$$y = f(u) = u + b$$

$$f(ku) = ku + b$$

$$kf(u) = k(u+b) = ku + kb \neq f(ku)$$

تصبح المنظومة خطية إذا حركنا المحور u بمقدار b إلى الأعلى

يكفي عدم تحقق أحد الشرطين لإثبات أن المنظومة غير خطية

أمثلة توضيحية

أمثلة على المنظومات الخطية

$$y(t)=\int_0^2 u(t)\,dt$$

$$y(t)=2t\,u(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}+3t^2y(t)=u(t)$$

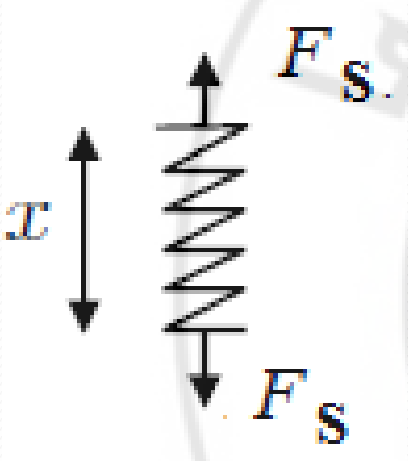
أمثلة على المنظومات غير الخطية

$$y(t)=\int_0^2 u^2(t)\,dt$$

$$y(t)=2t\,|u(t)|$$

$$\frac{dy(t)}{dt}+u(t)y(t)=u(t)$$

مثال



يطلب اختبار خطية النابض الموصوف بالمعادلة:

$$F_s = k_1 x + k_2 x^3$$

حيث k_1 و k_2 ثابتان وباقي الرموز مبينة في الشكل جانبا

$$\left.\begin{aligned} F_s(kx) &= k_1(kx) + k_2(kx)^3 = k_1 kx + k_2 k^3 x^3 \\ kF_s(x) &= k\left(k_1 x + k_2 x^3\right) = k_1 kx + k_2 kx^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_s(kx) \neq kF_s(x)$$

الشرط الأول غير محقق (وهذا يكفي للقول بلاخطية النابض)

مثال

نختبر تحقق مبدأ التحصيل الشامل

$$\left.\begin{aligned} F_s\left(x_1+x_2\right) &= k_1\left(x_1+x_2\right)+k_2\left(x_1+x_2\right)^3 \\ F_s\left(x_1\right)+F_s\left(x_2\right) &= \left(k_1x_1+k_2x_1^{\ 3}\right)+\left(k_1x_2+k_2x_2^{\ 3}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow F_s\left(x_1+x_2\right) \neq F_s\left(x_1\right)+F_s\left(x_2\right)$$

الشرط الثاني أيضاً غير محقق إذاً هذا النابض غير خطي

المخطط الصندوقي

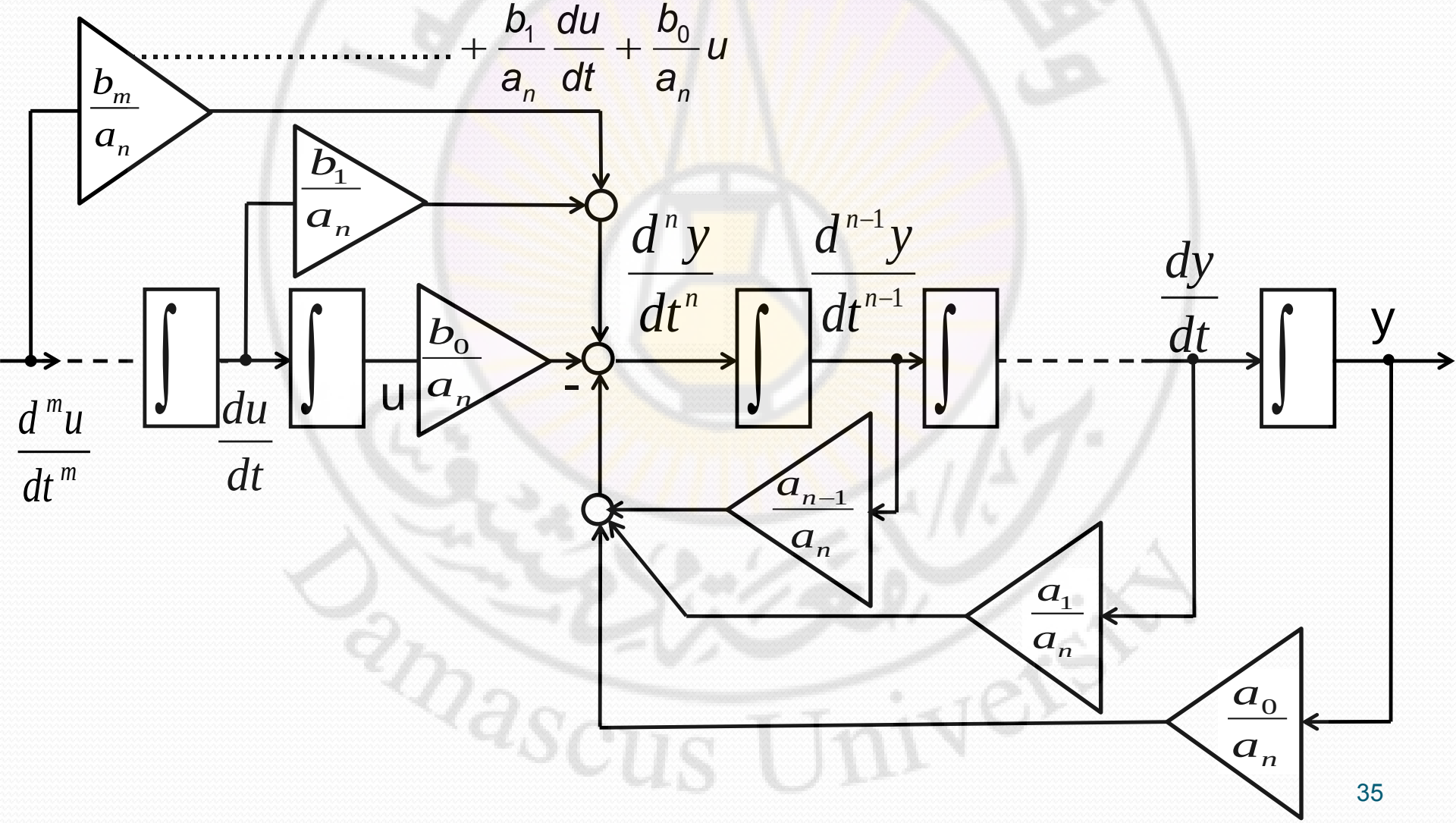
الشكل العام للمعادلة التفاضلية القياسية (إشارة الدخل u وإشارة الخرج y):

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} + \ldots\ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)} u}{dt^{(m-1)}} + \ldots\ldots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

نعزل المشتق الأعلى ونقسم على أمثاله:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{a_1}{a_n} \frac{dy}{dt} + \frac{a_0}{a_n} y \right) + \frac{b_m}{a_n} \frac{d^m u}{dt^m} + \frac{b_{m-1}}{a_n} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + \frac{b_1}{a_n} \frac{du}{dt} + \frac{b_0}{a_n} u$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} + \dots\dots + \frac{a_1}{a_n}\frac{dy}{dt} + \frac{a_0}{a_n}y\right) + \frac{b_m}{a_n}\frac{d^m u}{dt^m} + \frac{b_{m-1}}{a_n}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \frac{b_1}{a_n}\frac{du}{dt} + \frac{b_0}{a_n}u$$



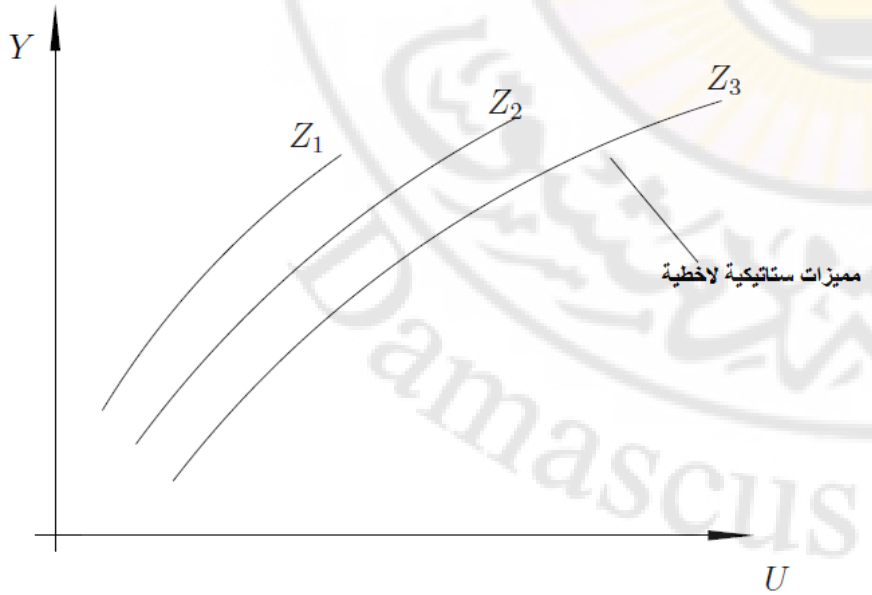
طرق التبسيط

- ✓ نماذج المنظومات الفعلية تكاد تكون جميعها ديناميكية Dynamic، لاخطية non-linear، متغيرة البارامترات time-variant، وهي في الغالب مستمرة continious وموزعة (يمكن اعتبارها مركزة lumped ببعض التبسيط خاصة بالنسبة للمنظومات قليلة الأبعاد أو التي تتحرك بسرعات قليلة نسبيا).

مشكلات النماذج	المعالجة
النموذج معقد	فرضيات تبسيط
النموذج غير خطي	إجراء التحويل الخطي – التقريب
النموذج من رتبة عالية	إجراء تحويل لابلاس تحويل النموذج لنموذج فضاء الحالة

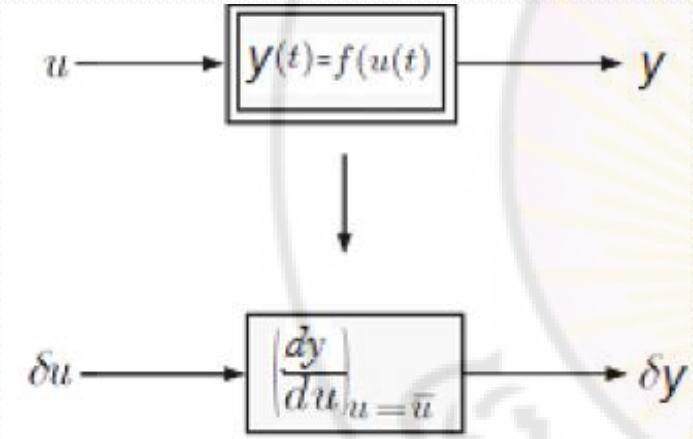
التحويل الخطي (التقريب الخطي) linearization

- التحويل الخطي هو إجراء تبسيطي يهدف إلى تحويل النماذج (المعادلات والمميزات البيانية) التي تعبر عن منظومة لا خطية إلى نماذج خطية بتقريب مقبول.
- يختلف نوع التحويل الخطي المعتمد باختلاف الطبيعة غير الخطية للمنظومة، ونميز بين:
  - ✓التحويل الخطي للميزات الستاتيكية
  - ✓التحويل الخطي للمعادلات التفاضلية اللاخطية



التحويل الخطي للميزات الستاتيكية

- ينتج عن عملية التحويل الخطي الاستعاضة عن العلاقة غير الخطية بين الدخل والخرج بعلاقة خطية يحددها **ميل المماس للمنحني** المعبر عن العلاقة الستاتيكية اللاخطية عند **نقطة عمل محددة**



نجري التحويل الخطي بثلاثة طرق:

1. **بيانياً:**
2. **تحليلياً:**
3. **حذف الحدود غير الخطية :**

التحويل الخطي للميزات الستاتيكية

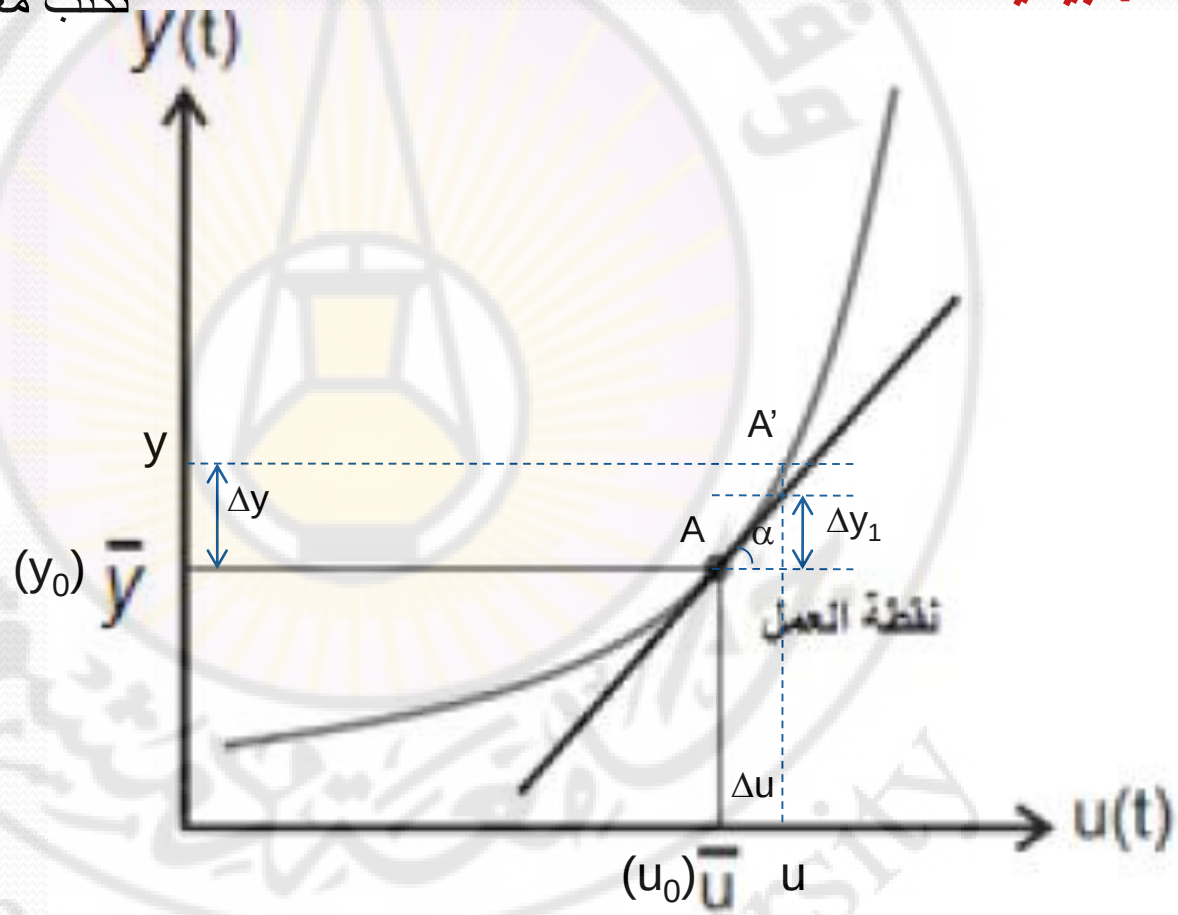
- أولاً : بيانياً

نكتب معادلة المماس في نقطة العمل حيث

$$\Delta y \approx \Delta y_1$$

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{df(u)}{d(t)} = k$$

$$y - \bar{y} = k\left(u - \bar{u}\right)$$



يكون الانحراف (الخطأ) مقبولاً عندما $\Delta u \to 0$

التحويل الخطي للميزات الستاتيكية

- **ثانياً: تحليلياً (رياضياً)**

تتم عملية التحويل الخطي بنشر العلاقة غير الخطية $y(t)=f(u(t))$ في سلسلة تايلور

$$y=f(\bar{u})+\left.\frac{df}{du}\right|_{u=\bar{u}}\cdot(u-\bar{u})+\frac{\left.\frac{d^2f}{du^2}\right|_{u=\bar{u}}}{2!}\cdot(u-\bar{u})^2+\ldots+\frac{\left.\frac{d^nf}{du^n}\right|_{u=\bar{u}}}{n!}\cdot(u-\bar{u})^n$$

- نحذف الحدود غير الخطية ونبقي على الحدين الخطيين

$$y=f(\bar{u})+\left.\frac{df}{du}\right|_{u=\bar{u}}\cdot(u-\bar{u})$$

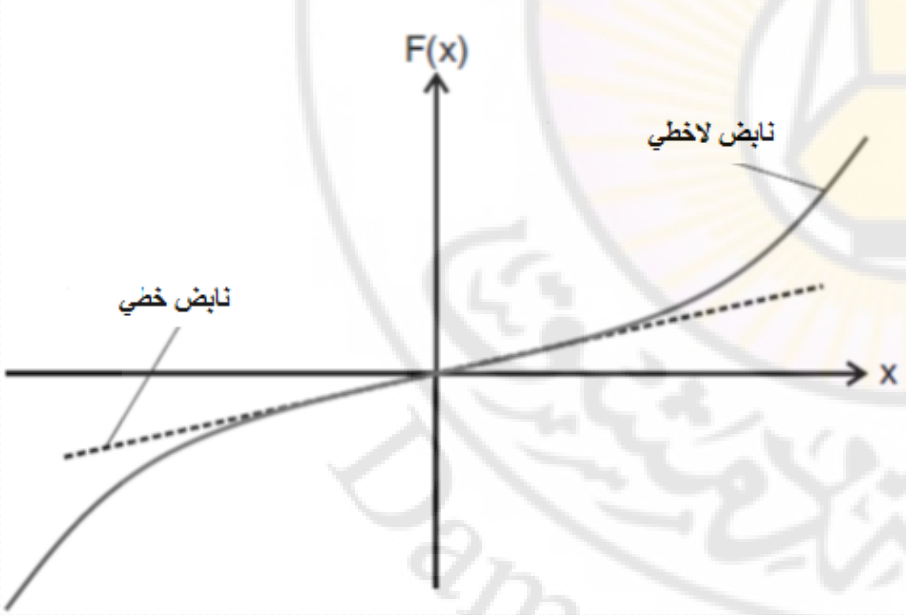
$$y=\bar{y}+k\cdot(u-\bar{u})$$

حيث k هو ميل المماس

مثال: النابض اللاخطي

- **ثالثاً: حذف الحدود غير الخطية في جوار مبدأ الإحداثيات**

نابض لا خطي يوصف بالمعادلة: $y = F(x) = k_1 x + k_2 x^3$



نقوم بتحويل هذه المعادلة إلى خطية في جوار مبدأ الإحداثيات وعند قيم كبيرة للانحرافات

- **في جوار مبدأ الإحداثيات:**

نهمل الحد الثاني من المعادلة فنحصل على معادلة النابض الخطي (نابض هوك)

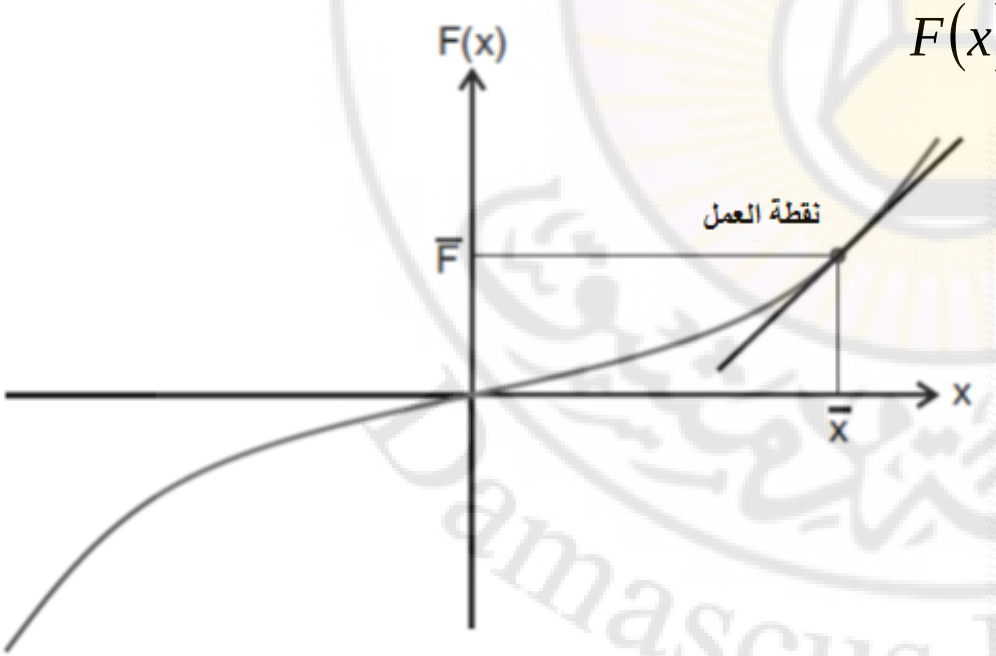
$$F(x) = k_1 x$$

مثال: النابض اللاخطي

➢في مجال الانحرافات الكبيرة:

لإجراء التحويل الخطي ينبغي أن نطور سلسلة تايلور في جوار نقطة مختلفة عن مبدأ الإحداثيات مع ضرورة الاكتفاء بالحد الخطي (الأول)

$$F(x)=\overline{F}(x)+\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=\overline{x}}\cdot\left(x-\overline{x}\right)=\overline{F}(x)+\overline{F'}\left(x-\overline{x}\right)$$



$$F(x)=k_1\overline{x}+k_2\overline{x}^3+\left(k_1+3k_2\overline{x}^2\right).\left(x-\overline{x}\right)$$

$$F(x)=\underbrace{\left(k_1+3k_2\cdot\overline{x}^2\right)}_{k}x-\underbrace{2k_2\overline{x}^3}_{d}$$

$$y=k\,x-d$$

التحويل الخطي للنماذج الديناميكية

✓ توصيف المنظومات الستاتيكية بعلاقة جبرية من الشكل: $x(t) = f\left(u(t)\right)$

✓ توصف المنظومات الديناميكية عموما بعلاقة من الشكل: $\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right)$

كي تكون المعادلة خطية : يجب أن يتحقق شرطا التجانس والتحصيل الشامل

تتم عملية التحويل الخطي بنشر العلاقة غير الخطية في سلسلة تايلور مع الاكتفاء بالحد الخطي.

$$\dot{x}(t) = f\left(\bar{x}, \bar{u}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} \cdot \left(x - \bar{x}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} \cdot \left(u - \bar{u}\right)$$

ما هو الشرط اللازم لكي يتم إجراء تحويل خطي لمعادلة تفاضلية؟

يجب أن نحدد نقطة عمل يكون تغير x عندها طفيفا أو معدوما عند الانحرافات الصغيرة

$f\left(\bar{x}, \bar{u}\right)$ الإحداثيات المقابلة لنقطة العمل

$\dot{x}(t) \to 0$

التحويل الخطي للنماذج الديناميكية

نجري التحويل الخطي عند الانحراف الطفيف عن هذه الوضعية بحيث يكون

$$x(t) = \bar{x} + \Delta x(t) \qquad \dot{x}(t) = \Delta \dot{x}(t)$$

بالاشتقاق ينتج:

$$u(t) = \bar{u} + \Delta u(t) \qquad \dot{u}(t) = \Delta \dot{u}(t)$$

كما هو واضح تتعلق ديناميكية المنظومة فقط بالقسم المتغير من الإحداثيات

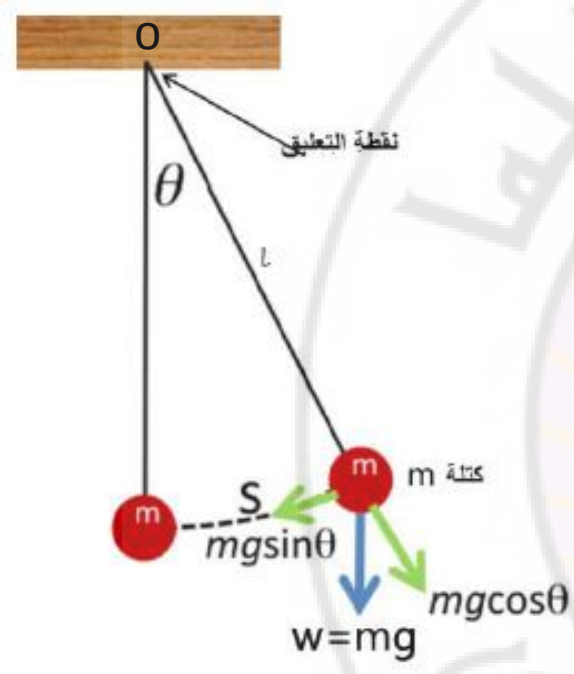
ومن أجل الحصول على معادلة تفاضلية خطية نعتبر أن قيم الانحرافات عن نقطة العمل صغيرة بما يكفي. بتعويض العلاقات الأخيرة بعلاقة التحويل الخطي ينتج:

$$\Delta\dot{x}(t) = \underbrace{f(\bar{x},\bar{u})}_{=0} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot \left(\bar{x} + \Delta x(t) - \bar{x}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot \left(\bar{u} + \Delta u(t) - \bar{u}\right)$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot \Delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot \Delta u(t) \Rightarrow \boxed{\Delta\dot{x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)}$$

معادلة الحالة

النموذج الرياضي لنواس بسيط



فرضيات التبسيط المعتمدة:

- اعتبار كتلة النواس نقطية متركزة على بعد l من نقطة التعليق (كتلة الخيط مهملة)
- مقاومة الهواء وقوى الاحتكاك في نقطة التعليق معدومة
- لا يوجد دخل

هنا تتكون هذه المنظومة البسيطة من عنصر وحيد هو الكرة التي تتأثر بقوتي ثقل الكرة وتوتر رد فعل خيط التعليق

$$\sum T_o = I\ddot{\theta}$$

حيث I عزم العطالة الكتلي $I = m \cdot l^2$

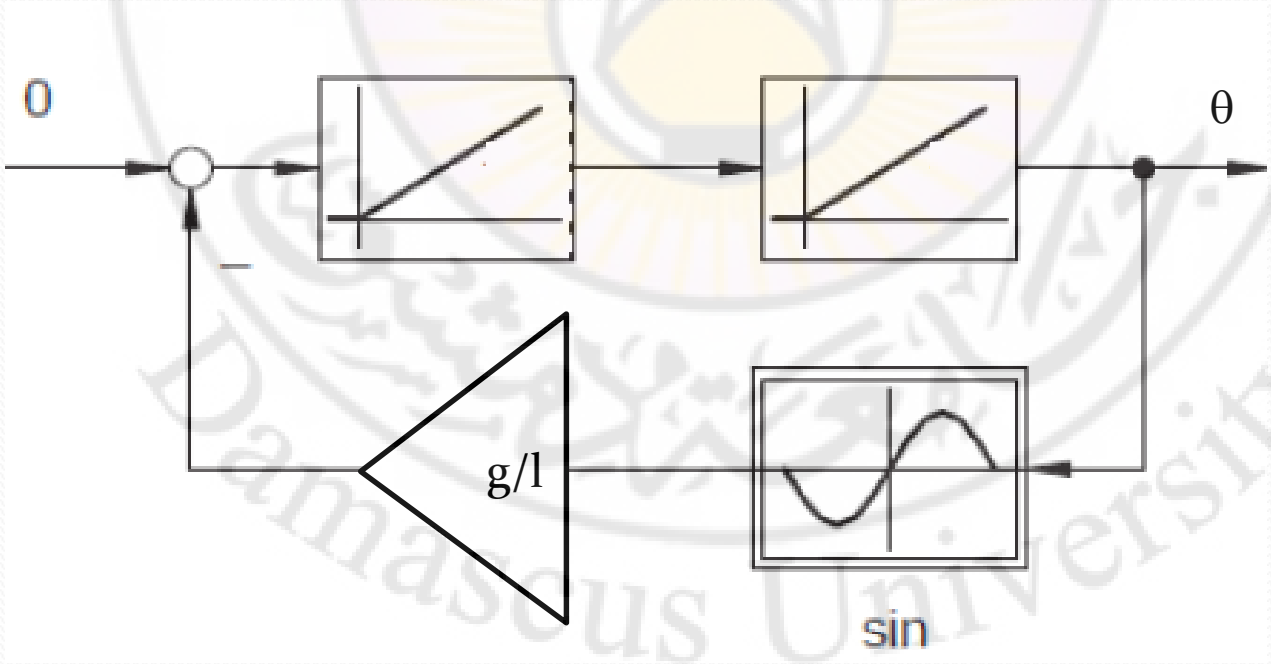
$$-mg \cdot l \sin\theta = m \cdot l^2 \ddot{\theta}$$

$$g \sin\theta + l\ddot{\theta} = 0$$

النموذج الرياضي لنواس بسيط

بالقسمة على أمثال المشتق الأعلى رتبة نجد:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$



النموذج الرياضي لنواس بسيط

$$\frac{l}{g}\ddot{\theta}+\sin\theta=0$$

$$f_2(\theta)=\sin\theta$$

التحقق من الخطية:

شرط التجانس:

$$k\cdot y=f(ku)=k\cdot f(u)$$

$$\sin(k\theta)\neq k\cdot\sin\theta$$

شرط التحصيل الشامل:

$$f(u_1+u_2)=f(u_1)+f(u_2)$$

$$\sin(\theta_1+\theta_2)\neq\sin\theta_1+\sin\theta_2$$

التابع لا يحقق الشرطين

تحويل النموذج الرياضي لنواس بسيط إلى نموذج خطي

$$f_2(\theta) = \sin\theta$$

التحويل الخطي بنشر تايلور :

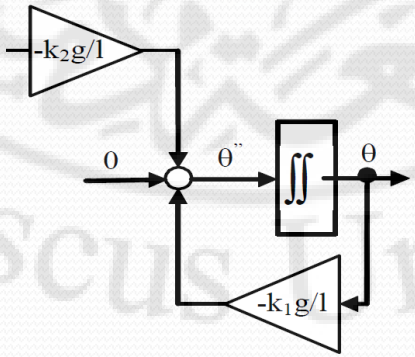
$$y = f(\bar{u}) + \left.\frac{df}{du}\right|_{u=\bar{u}} \cdot (u - \bar{u})$$

$$y = \bar{y} + k \cdot (u - \bar{u})$$

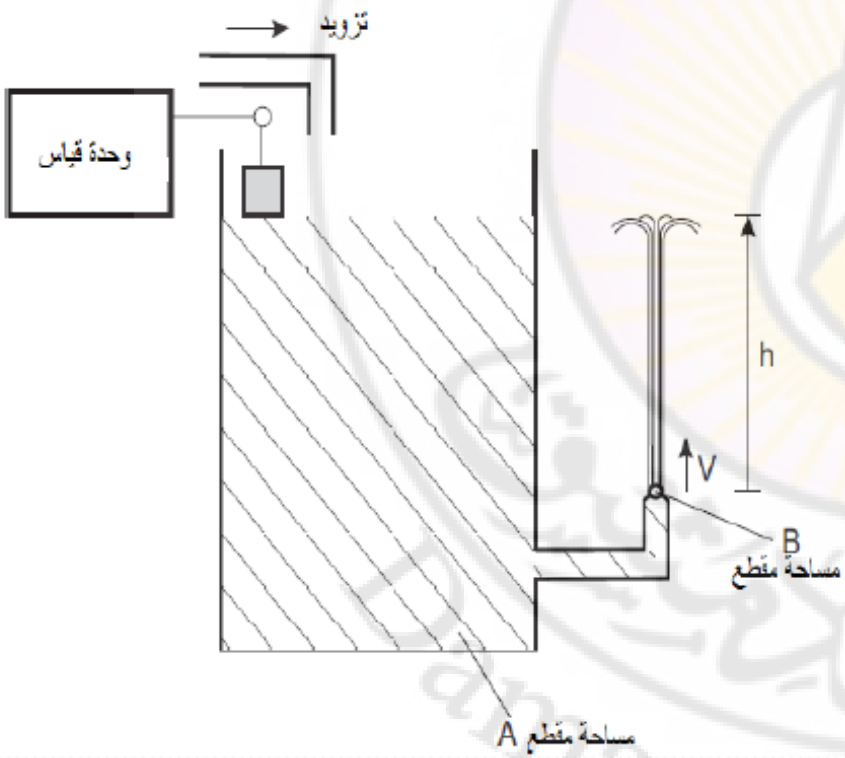
$$f_2(\theta) = \sin\bar{\theta} + \cos\bar{\theta} \cdot (\theta - \bar{\theta})$$

نفرض أن: $k_1 = \cos\bar{\theta}$ و $k_2 = \sin\bar{\theta} + \cos\bar{\theta} \cdot (\bar{\theta})$

ينتج: $f_2(\theta) = k_1\theta + k_2$ بالتعويض في معادلة النواس $\frac{l}{g}\ddot{\theta} + k_1\theta + k_2 = 0$



النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف



1. صياغة المسالة: وضع نموذج رياضي مبسط لمنظومة خزان ماء مع تصريف.
2. الهدف من النموذج: تحليل عام للطبيعة الستاتيكية والديناميكية للمنظومة.
3. فرضيات التبسيط: السائل متجانس. اللزوجة والانضغاطية مهملة. المقاومة في فتحة التصريف مهملة.
4. التفكيك: يمكن مقاربة هذه المسالة بطرق مختلفة وفقا للمعلومات المتوفرة : في حالة معرفة مساحة مقطع الخزان A ومساحة مقطع فتحة التصريف B يمكن اعتبار كل من مستوى السائل في الخزان (يمكن قياسه بواسطة الفواشة) غزارة التدفق من فتحة التصريف كافيين لتوصيف التغيرات التي تطرأ على المنظومة.

النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف

بالنسبة لغزارة التصريف وباعتبار مقاومة الجريان في الفتحة معدومة (لا يوجد فعل خنق للجريان)

فإن ارتفاع نافورة التصريف سيكون مساويا لمستوى السائل في الخزان. ويمكن هنا أن نعتمد على معادلات حركة السائل (قذف شاقولي) أي:

$$v = g \cdot t$$

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

من هاتين العلاقتين يمكن أن نكتب:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v}{g}\right)^2$$

ومنه العلاقة المعبرة عن السرعة:

$$v = \sqrt{2gh}$$

وهي عبارة تمكننا من الربط بين التدفق في خط التصريف q_{dr} [m³/s] وارتفاع مستوى السائل h من خلال العلاقة :

$$q_{dr} = B \cdot v$$

النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف

نحدد الدخل والخرج:

✓نعتبر غزارة التدفق إلى الخزان q_s إشارة دخل

✓ارتفاع السائل في الخزان h إشارة خرج

تغير مستوى السائل في الخزان

$$A\frac{dh}{dt} = q_s - q_{dr}$$

هذه العلاقة يمكن اعتبارها بمثابة النموذج الأولي ويفضل كتابتها لعزل الدخل والخرج بالشكل:

$$A\frac{dh}{dt} + B\cdot\sqrt{2gh} = q_s$$

النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف

توصلنا للنموذج الرياضي :

$$T_1 \frac{dy}{dt} + K \cdot \sqrt{y} = u$$

<u>التحقق من الخطية</u> : الحد الثاني $f_2(y) = K \cdot \sqrt{y}$ غير خطي لأنه لا يحقق الشرطين

شرط التجانس:

$$f(cu) \overset{?}{=} c \cdot f(u)$$

$$f(cu) = \sqrt{cy}$$

$$c \cdot f(u) = c \cdot \sqrt{y}$$

$$f(cu) \neq c \cdot f(u)$$

شرط التحصيل الشامل:

$$f(u_1 + u_2) \overset{?}{=} f(u_1) + f(u_2)$$

$$f(u_1 + u_2) = \sqrt{y_1 + y_2}$$

$$f(u_1) + f(u_2) = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}$$

$$f(u_1 + u_2) \neq f(u_1) + f(u_2)$$

تحويل النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف إلى نموذج خطي

توصلنا للنموذج الرياضي :

$$T_1 \frac{dy}{dt} + K \cdot \sqrt{y} = u$$

<u>التحويل الخطي بنشر تايلور</u> :

$$f_2(y) \approx f_2(\bar{y}) + \left.\frac{df_2(y)}{dy}\right|_{y=\bar{y}} \cdot (y - \bar{y})$$

$$f_2(y) \approx \left[k\sqrt{\bar{y}}\right] + \left(k\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}\right)(y - \bar{y})$$

$$f_2(y) \approx \left[k\sqrt{\bar{y}}\right] + \left(k\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}\right)(\bar{y}) + \left(k\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}\right)(y)$$

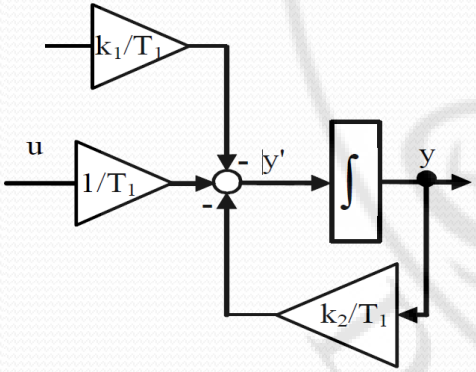
نفرض أن:

$$k_2 = \left(k\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}\right),\ k_1 = \left[k\sqrt{\bar{y}}\right] + \left(k\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}\right)\left(\bar{y}\right)$$

نكتب نتيجة التحويل الخطي للحد غير الخطي على النحو التالي:

$$f_2(y) \approx k_1 + k_2(y)$$

وتصبح معادلة المنظومة بعد التحويل الخطي على الشكل:



$$T_1\frac{dy}{dt} + k_2(y) + k_1 = u$$

تصبح عملية التحويل الخطي أكثر صعوبة في المنظومات ذات النماذج الأشد تعقيدا، كما أن الأخطاء الناجمة عن هذا التحويل قد تكون في بعض الحالات غير مقبولة.

Laplace Transformation تحويل لابلاس

تحويل لابلاس: يحول المعادلات التفاضلية الجبرية ADE التي تصف المنظومات الديناميكية (سواء كانت خطية أم غير خطية) إلى معادلات جبرية

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

ويسمى s التردد العقدي حيث $s=\delta+j\omega$

فيكون: $F(s)=L\{f(t)\}$

أو باستخدام رمز هانتل $F(s)\bullet\!-\!\circ f(t)$

يمكن الانتقال من تحويل لابلاس (المفيد في تحليل النظم الخطية) إلى تحويل فورييه (المفيد في تحليل الاشارات) بإبدال التردد العقدي s بالتردد jω على أن يتم ذلك حصرا بالنسبة للتوابع المستمرة التي يوجد لها تحويل فورييه وتحويل لابلاس

بعض خصائص تحويل لابلاس

عند إجراء تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية يجب أن تكون الشروط الابتدائية (كافة المشتقات في اللحظة t) تساوي صفر.

إذا لم تكن الشروط الابتدائية تساوي الصفر يجب الانتباه إلى أن:

مشتق من الرتبة الثانية:

$$L\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - sY(0) - Y'(0)$$

مشتق من الرتبة الأولى:

$$L\{y'(t)\} = sY(s) - Y(0)$$

تحويل لابلاس عملية خطية

$$L\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\} + c_2L\{F_2(t)\}$$

تحويل لابلاس لجداء تابعين لا يساوي جداء تحويلي لابلاس

$$L\{c_1F_1(t) \times c_2F_2(t)\} \neq L\{c_1F_1(t)\} \times L\{c_2F_2(t)\}$$

تحويل لابلاس العكسي

يمكن الانتقال من صيغة تحويل لابلاس (من الفضاء العقدي) إلى الصيغة الزمنية بإجراء تحويل لابلاس العكسي كما يلي:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

وتستخدم الجداول المرجعية للحصول على تحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي بحيث لا يكون حسابها في كل مرة ضروريا.

Nr.	$f(t)$; $f(t)=0$ for $t<0$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\delta(t)$	1
2	1	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^2	$\frac{2}{s^3}$
5	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
6	$e^{-\delta t}$	$\frac{1}{s+\delta}$
7	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{Ts+1}$

Nr.	$f(t)$; $f(t)=0$ for $t<0$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
8	$t\,e^{-\delta t}$	$\frac{1}{(s+\delta)^2}$
9	$1-e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(Ts+1)}$
10	$1-\frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$	$\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$
11	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
12	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
13	$e^{-\delta t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}$
14	$e^{-\delta t}\cos\omega t$	$\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}$
15	$1-\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}e^{-\frac{dt}{T}}\sin(\sqrt{1-d^2}\frac{t}{T}+\arccos d)$	$\frac{1}{s(T^2s^2+2dTs+1)}$

Transfer function تابع التحويل

تأخذ المعادلة التفاضلية لمنظومة أحادية الدخل والخرج الشكل القياسي التالي:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots\dots\dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{d\ y}{dt} + a_0 y =$$

$$b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots\dots\dots + b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{d\ u}{dt} + b_0 u$$

إذا تم استبدال إشارة التفاضل $\frac{d}{dt}$ في المعادلة السابقة بـ D (معامل التفاضل) تؤول المعادلة إلى الشكل التالي :

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots\dots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) =$$

$$= (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots\dots + b_2 D^2 + b_1 D + b_0) u(t)$$

✓هذه الصيغة لا تعدو كونها تبسيطا للكتابة. كما أنها لا تكون ممكنة إذا تضمنت المعادلة السابقة حدودا غير خطية

✓لكن تحويل لابلاس الذي يسمح بتحويل علاقة تفاضلية من الشكل المشار إليه إلى علاقة جبرية (يمكن تطبيقه حتى في حال احتواء المعادلة حدودا غير خطية) ويؤدي في حالتنا هذه إلى الحصول على علاقة مشابهة باستخدام المتحول العقدي S وذلك بشرط أن تكون الشروط الابتدائية تساوي الصفر (للتمكن من التخلص من ثابت التكامل).

✓تحويل لابلاس للعلاقة السابقة باعتبار الشروط الابتدائية صفرا هو:

$$(a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 S^2 + a_1 S + a_0)Y(S) =$$

$$= (b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \ldots\ldots + b_2 S^2 + b_1 S + b_0)U(S)$$

بالاستعاضة عن العبارتين داخل القوسين بالعاملين A(S) و B(S) تكتب المعادلة كالتالي :

$$A(S) \cdot Y(S) = B(S) \cdot U(S)$$

Transfer function تابع التحويل

وبالتالي يمكن وصف علاقة الخرج بالدخل من خلال النسبة :

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{B(S)}{A(S)}$$

- يسمى G(S) تابع التحويل Transfer function ويعرف بأنه نسبة تمثيل الخرج على تمثيل الدخل في فضاء لابلاس.
- يشكل تابع التحويل بهذا المعنى واحدا من أهم أشكال النماذج الرياضية للعناصر والمنظومات ويستخدم بشكل واسع في عمليات تحليل استجابة وطبائع هذه المنظومات.

تعريف خطية المنظومة في فضاء لابلاس

1. إذا كانت إشارة خرج المنظومة الناتجة عن تأثير مجموع إشارتين خطيتين يساوي المجموع الخطي لاستجابته على هاتين الإشارتين :

$$Y_1(S) = G(S) \cdot U_1(S) \qquad Y_2(S) = G(S) \cdot U_2(S)$$

$$Y(S) = Y_1(S) + Y_2(S) = G(S) \cdot [U_1(S) + U_2(S)] = G(S).U_1(S) + G(S) \cdot U_2(S)$$

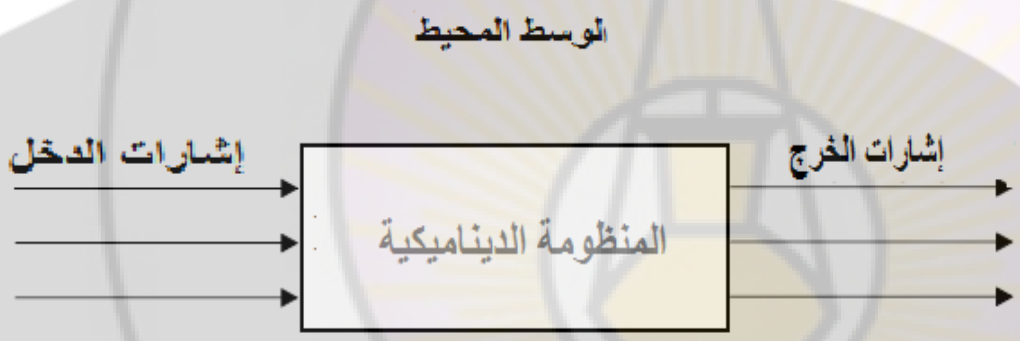
2. إذا كان تضخيم إشارة الدخل C مرة يجب أن تسبب مضاعفةً لإشارة الخرج C مرة أيضاً

$$C \cdot G(S) \cdot U(S) = C \cdot Y(S)$$

3. إذا كان رد فعل المنظومة على الإشارة الصفرية يساوي الصفر .

Block Diagrams المخططات الصندوقية

نعبر بيانيا عن المنظومة وفق تعريفها بالمخطط التالي

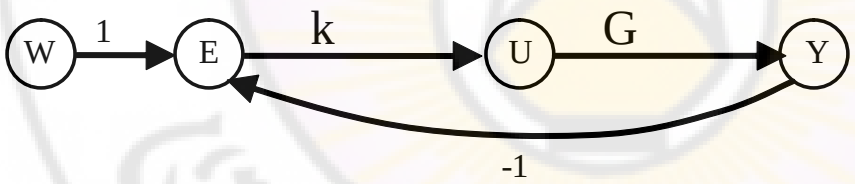


وتستخدم المخططات الصندوقية لتبسيط رسم المنظومات بدرجات تفصيل مختلفة بشكل يوضح بعض تفاصيلها والعمليات الجارية.

يكتب تابع التحويل لكل عنصر ضمن الصندوق فيما يعطي المخطط طريقة توصيل العناصر

signal flow charts مخططات سير الإشارة

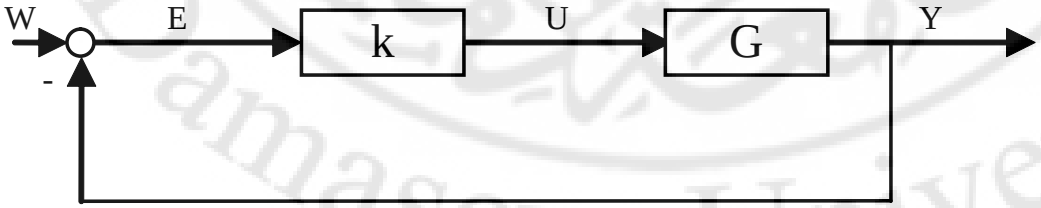
تستخدم مخططات سير الإشارة لتوضيح التأثير المتبادل للإشارات فيما بينها داخل المنظومات فيعبر عن الإشارات بدوائر فيما يعبر عن العناصر أو العمليات التي تجري على هذه الإشارات بأسهم، حيث تنتج كل إشارة من جداء العقدة السابقة لها مع التأثير الذي يعبر عنه السهم. فإذا ما انتهى سهمان إلى العقدة ذاتها، مثلت تلك العقدة مجموع تأثيريهما.



E=W-Y

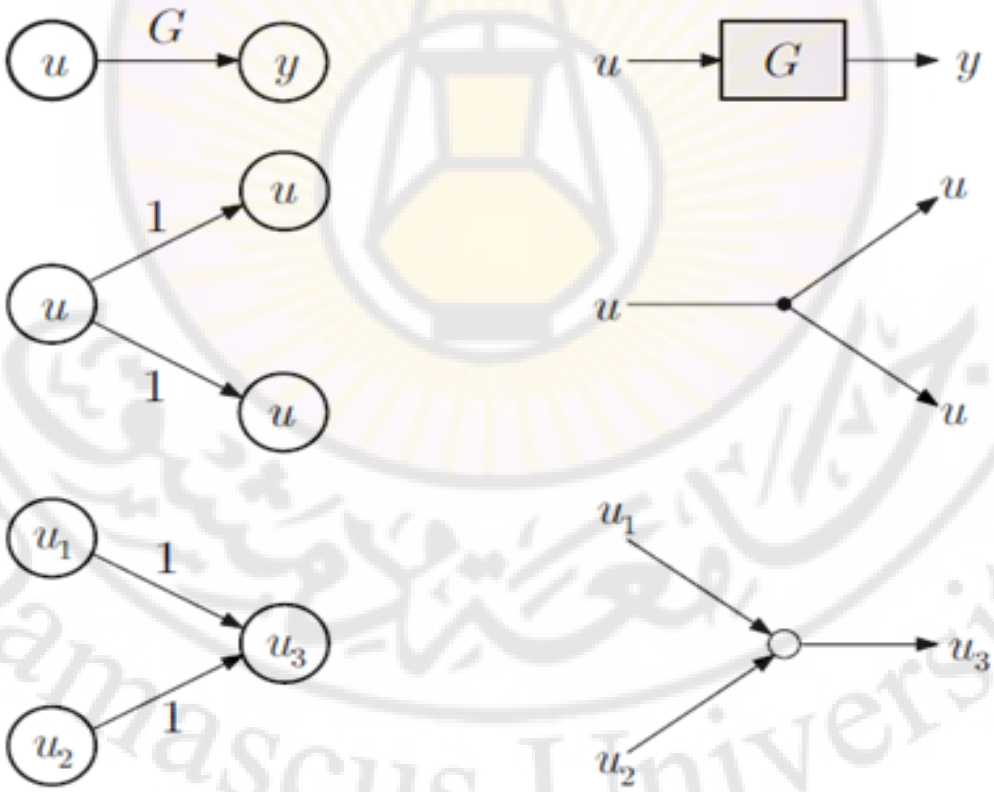
U=kE

Y=GU



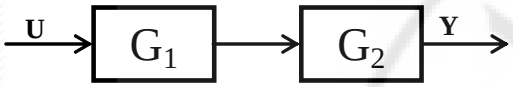
مقارنة بين عناصر المخططات الصندوقية ومخططات سير الإشارة

المخططات الصندوقية | مخططات سير الإشارة

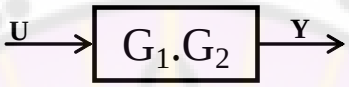


تبسيط المخططات الصندوقية

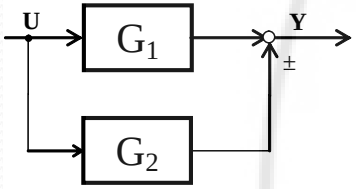
وصل عنصرين على التسلسل



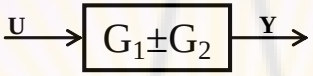
$Y = G_1.G_2.U$



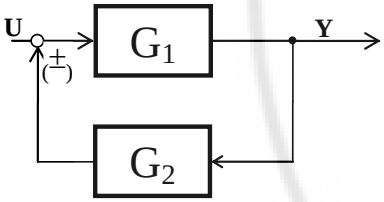
وصل عنصرين على التوازي



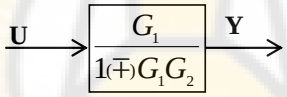
$Y = G_1.\ U \pm G_2.U$



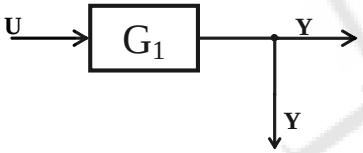
تابع التحويل المكافئ لعنصر مع تغذية عكسية



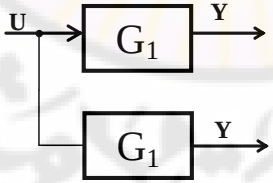
$Y = G_1(U \underset{(-)}{\pm} G_2 Y)$



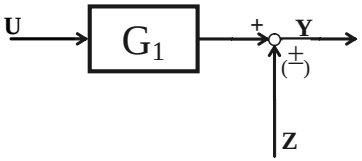
نقل تفرع من بعد عنصر إلى ما قبله



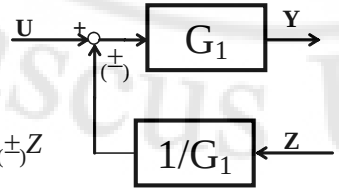
$Y = G_1.U$



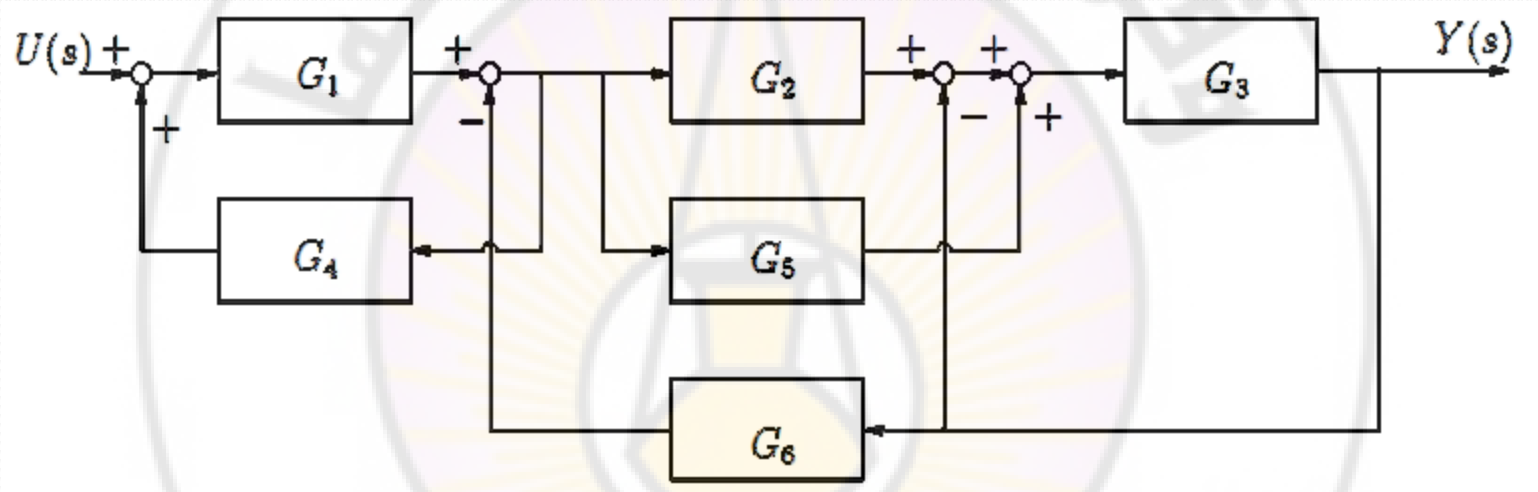
نقل مجمع من بعد عنصر إلى ما قبله



$Y = G_1 U \underset{(-)}{\pm} Z$



مثال: أوجد تابع النقل المكافئ للحلقة التالية:



نحصل على تابع النقل المكافئ بإجراء الخطوات التالية:

1- تغيير ترتيب المجمعين

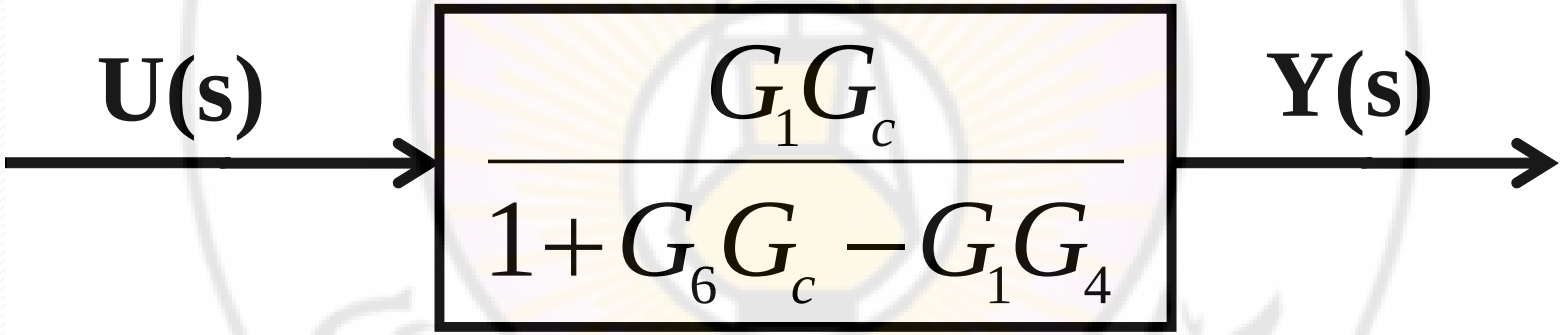
2- التخلص من الوصل على التوازي ومن التغذية العكسية:

3 - التخلص من الوصل على التسلسل:

4 - نقل التفرع إلى اليمين

5 - التخلص من ال ا ربطة العكسية الداخلية:

6 - التخلص من الوصل على التسلسل وال ا ربطة العكسية



فضاء الحالة state-space

✓تسمى الصيغة المصفوفاتية في العلوم الهندسية بـمعادلة فضاء الحالة أو **معادلة الحالة**.

✓إذا شملت هذه المعادلات معادلة الخرج، سميت جملة المعادلات "**نموذج فضاء الحالة** للمنظومة الفيزيائية".

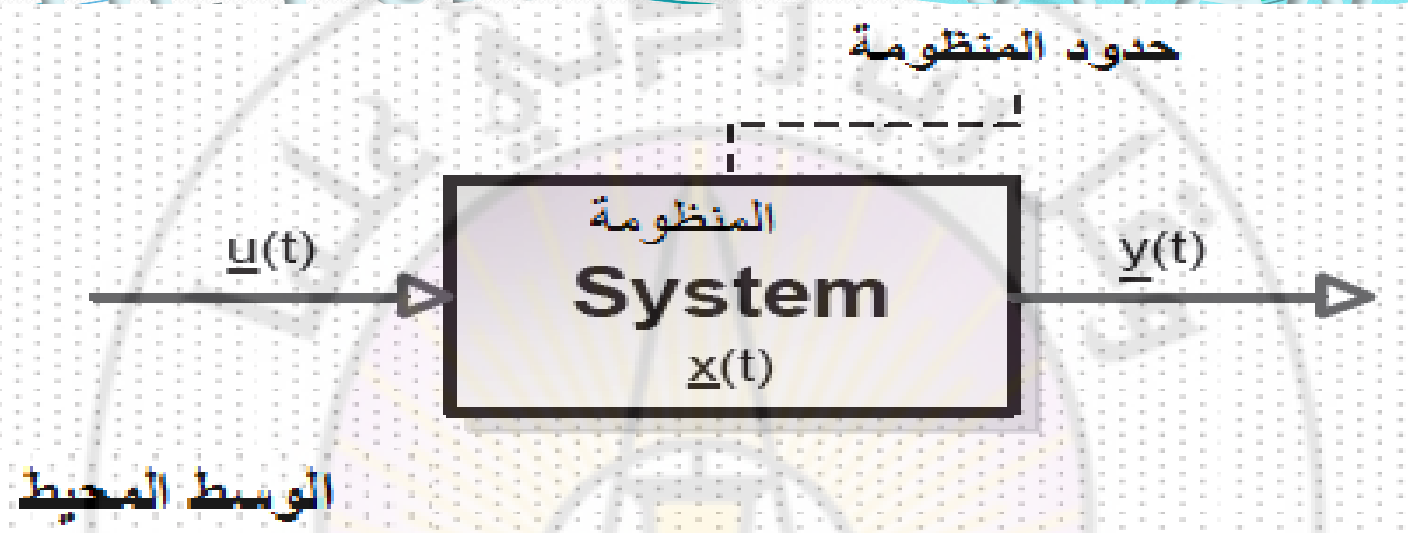
✓نستعيض في نموذج فضاء الحالة عن المعادلة التفاضلية من الرتبة n بـ n معادلة تفاضلية من الرتبة 1.

✓يستخدم **نموذج فضاء الحالة** بشكل واسع في أجهزة الحل العددي Solvers

✓يسمح **نموذج فضاء الحالة** بفصل واضح بين عمليتي النمذجة والمحاكاة.

متغيرات الحالة: نميز ثلاث مجموعات من المقادير في المنظومات التقنية:

مقادير الدخل $\underline{u}(t)$ مقادير الخرج $\underline{y}(t)$ مقادير الحالة $\underline{x}(t)$



مقادير الحالة X: هي متغيرات المنظومة أو العناصر الداخلية التي تصف حالة مكوناتها ومقاديرها في لحظة **زمنية معينة**، حيث x مقدار شعاعي بعده n.

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

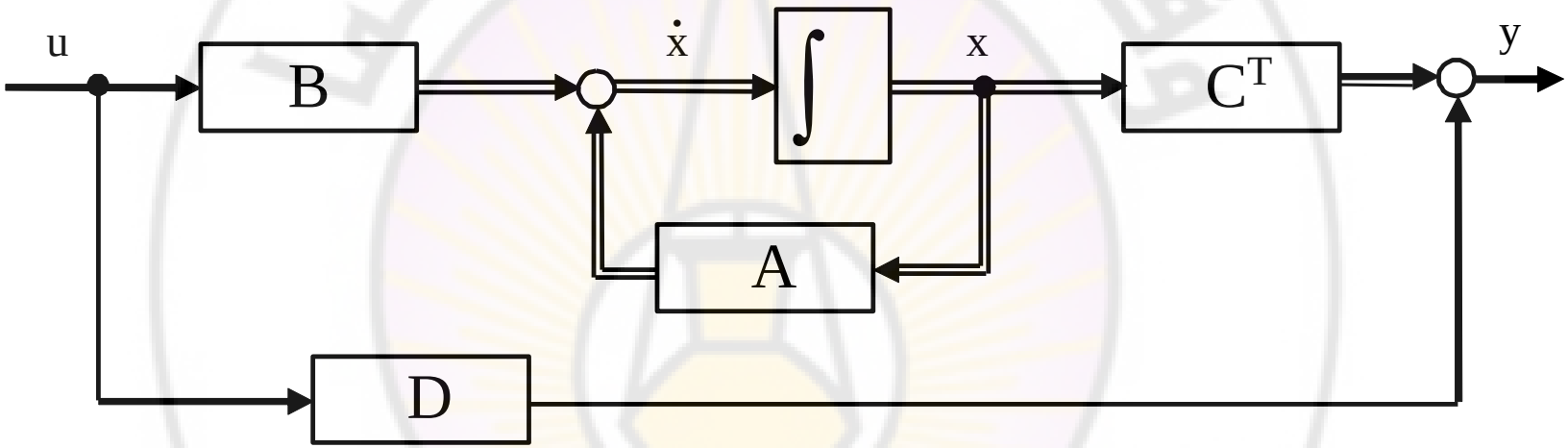
✓ يسمى n بعد نموذج فضاء الحالة، ويتطابق مع رتبة المنظومة.

✓ يمكننا بمعرفة المؤثرات الخارجية (إشارات الدخل) حساب سلوك المنظومة في جميع اللحظات اللاحقة.

شكل المعادلة المصفوفاتية لفضاء الحالة:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = C^T x + Du$$

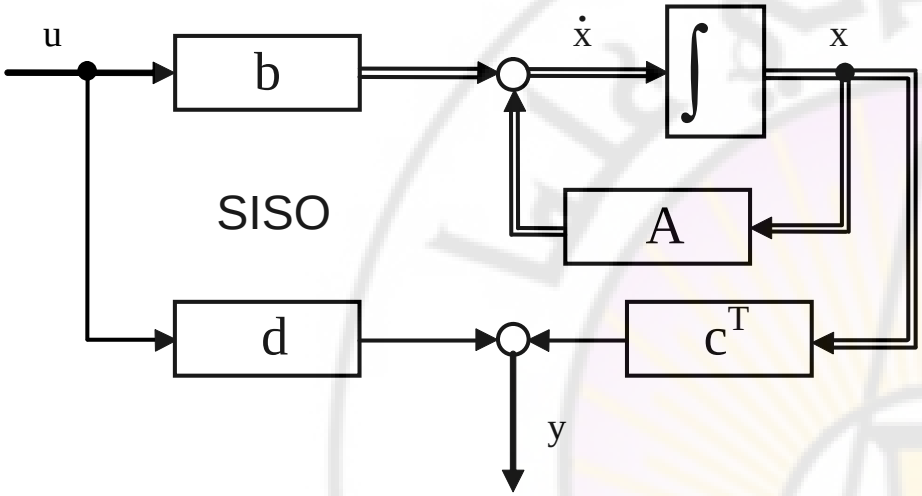


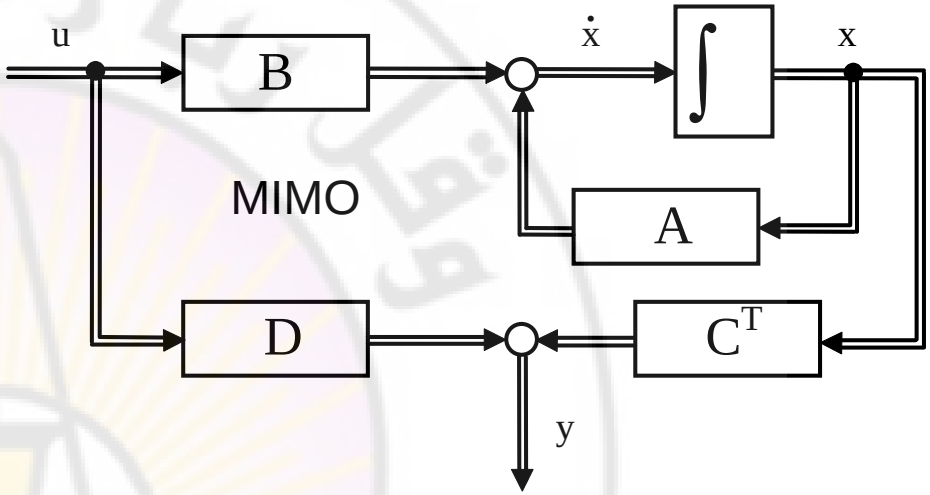
حيث: A: مصفوفة المنظومة، وهي مصفوفة مربعة دائماً (n x n)، n عدد مقادير الحالة وهو رتبة المعادلة الأصلية،

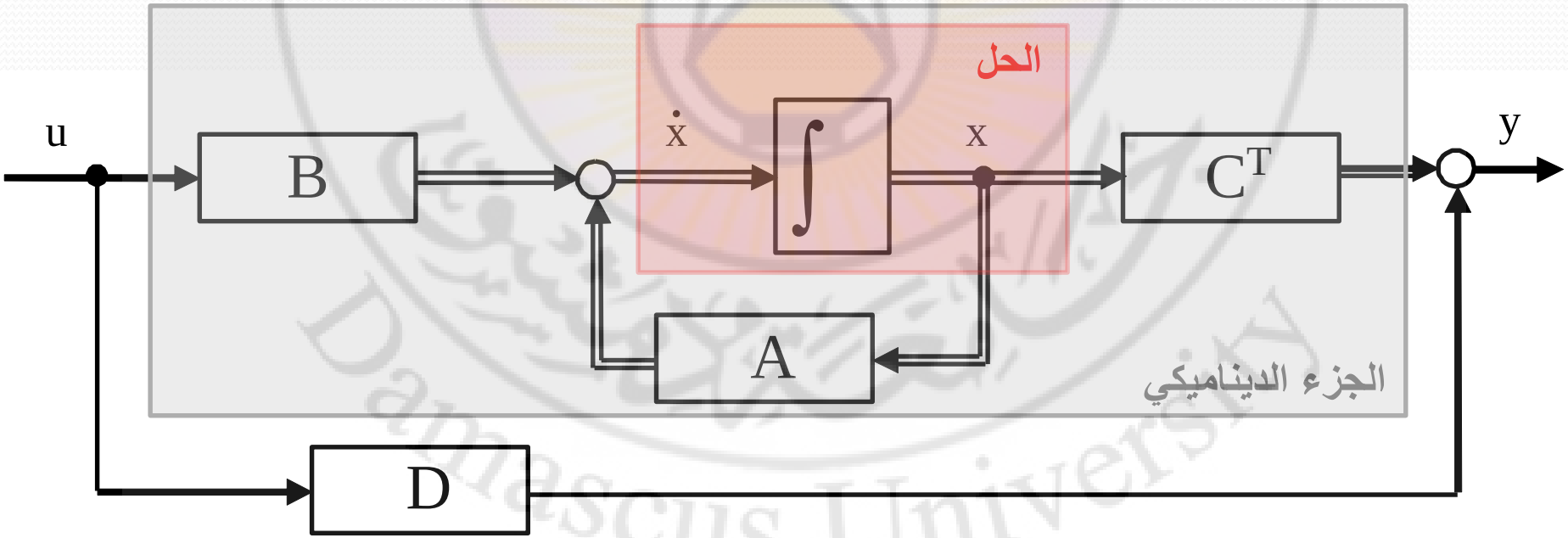
B: مصفوفة الدخل (أو مصفوفة إشارات التحكم) (r عامود x n سطر)، (r=1) عدد إشارات الدخل.

C^T: مصفوفة الخرج أو مصفوفة قابلية الرصد (m x n)، (m=1) عدد إشارات الخرج.

D : مصفوفة العبور (m x r)، وهي عبارة عن مقدار سلمي في المنظومات أحادية الدخل.

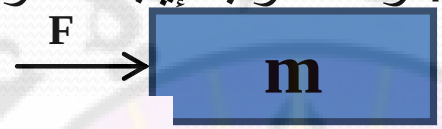






الجزء الستاتيكي

مثال : تتعرض الكتلة m لقوة خارجية F والمطلوب إيجاد نموذج فضاء الحالة لهذه المنظومة.



1- نحدد إشارتي الدخل $u = F$ والخرج $y = \delta$

2- من مخطط الجسم الحر والقوانين الفيزيائية نوجد المعادلة التفاضلية للمنظومة

$$\sum F = ma \Rightarrow F = m\ddot{\delta}$$

3- المعادلة التفاضلية من الدرجة 2 : نحدد بارامتري حالة (الانتقال والسرعة)

$$x_1 = \delta$$
$$x_2 = \dot{\delta} = v$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m} \cdot F$$

4- الشكل القياسي لمعادلة الحالة :

$$\underset{2\times1}{\dot{x}} = \underset{2\times2}{A}\,\underset{2\times1}{x} + \underset{2\times1}{B}\,\underset{1\times1}{u}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = \dot{\delta} \\ \dot{x}_2 = \dot{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \{F\}$$

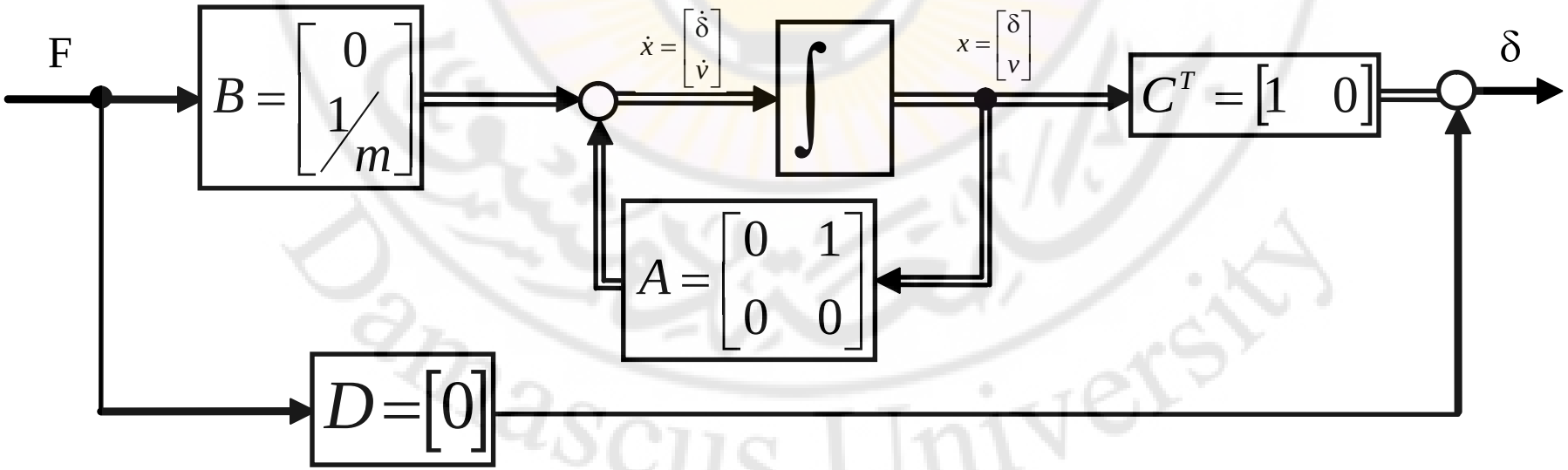
$$v = C^T x + Du$$

5- الشكل القياسي لمعادلة الخرج

$$\{y = \delta\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \{F\}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \{F\}$$



الانتقال من المعادلة التفاضلية إلى نموذج فضاء الحالة

أنقل المعادلة التفاضلية التالية إلى نموذج فضاء الحالة

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = bu$$

نعزل المشتق الأعلى درجة ونقسم على أمثاله:

$$y''' = -\left(\frac{a_2}{a_3} y'' + \frac{a_1}{a_3} y' + \frac{a_0}{a_3} y\right) + \frac{b}{a_3} u$$

المعادلة التفاضلية من المرتبة 3 نحدد 3 متغيرات حالة :

$$x_1 = y \Rightarrow x_1' = y' = x_2$$

$$x_2 = y' \Rightarrow x_2' = y'' = x_3$$

$$x_3 = y'' \Rightarrow x_3' = y''' = x_2'' = x_1'''$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$x_3' = -\frac{a_2}{a_3} x_3 - \frac{a_1}{a_3} x_2 - \frac{a_0}{a_3} x_1 + \frac{b}{a_3} u$$

$$x_1 = y \Rightarrow x_1' = y' = x_2$$

$$x_2 = y' \Rightarrow x_2' = y'' = x_3$$

$$x_3 = y'' \Rightarrow x_3' = y''' = x_2'' = x_1'''$$

$$x_3' = -\frac{a_0}{a_3}x_1 - \frac{a_1}{a_3}x_2 - \frac{a_2}{a_3}x_3 + \frac{b}{a_3}u$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = C^T x + Du$$

$$\begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b}{a_3} \end{bmatrix} \{u\}$$

$$\{y\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + [0]\{u\}$$

الانتقال من تابع التحويل إلى فضاء الحالة

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2s+1}{5s^2+3s+4}$$

1- الانتقال من تابع التحويل إلى معادلة تفاضلية (عند شروط ابتدائية صفرية)

نجزئ تابع التحويل إلى جداء تابعين على التسلسل

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{5s^2+3s+4}\cdot(2s+1)$$

$$Y(s)\left[5s^2+3s+4\right]=U(s)\left[2s+1\right]$$

$$5s^2Y(s)+3sY(s)+4Y(s)=U(s)2s+U(s)$$

بإجراء تحويل لابلاس العكسي عند شروط ابتدائية صفرية نكتبها في الفضاء الزمني

$$5y''+3y'+4y=2u'+u$$

2- الانتقال من معادلة تفاضلية إلى فضاء الحالة

$$5y'' + 3y' + 4y = 2u' + u$$

المعادلة التفاضلية في الطرف الأيسر من المرتبة 2 نحدد متغيري حالة :

$$x_1 = y \Rightarrow x_1' = y'$$

$$x_2 = y' \Rightarrow x_2' = y''$$

المعادلة التفاضلية في الطرف الأيمن يجب ألا تحوي مشتقات:

$$u_1 = u \Rightarrow u_1' = u'$$

$$u_2 = u_1' = u'$$

نعوض في المعادلة التفاضلية :

$$x_2' = -\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2 + \frac{1}{5}u_1 + \frac{2}{5}u_2$$

$$\begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

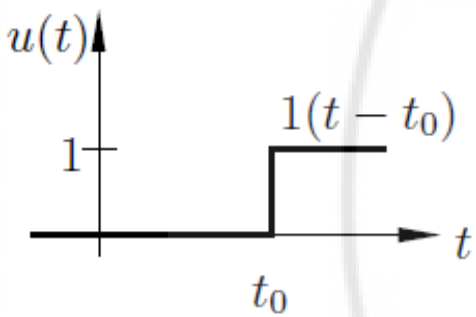
$$\{y\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

إشارات الدخل القياسية

إشارات الدخل القياسية: هي إشارات دخل ذات توصيف رياضي محدد اتفق على استخدامها للمقارنة بين استجابات المنظومات المختلفة (للحصول على المميزات الزمنية) منها:

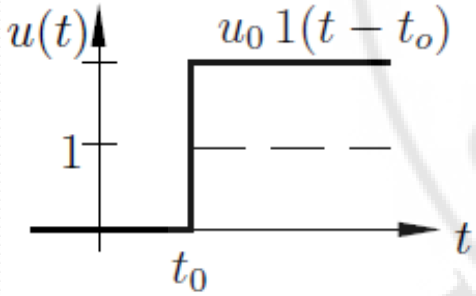
1. تابع القفزة step function
2. تابع النبضة
3. تابع الصعود Ramp function
4. التابع القطعي parabolic function
5. الإشارة الجيبية sinusoidal change

1. **تابع القفزة step function:** هو أكثر توابع إشارات الاختبار المستخدمة في التطبيق العملي، ينشأ تابع القفزة في اللحظة t=0 يوضح تحليليا كما يلي:

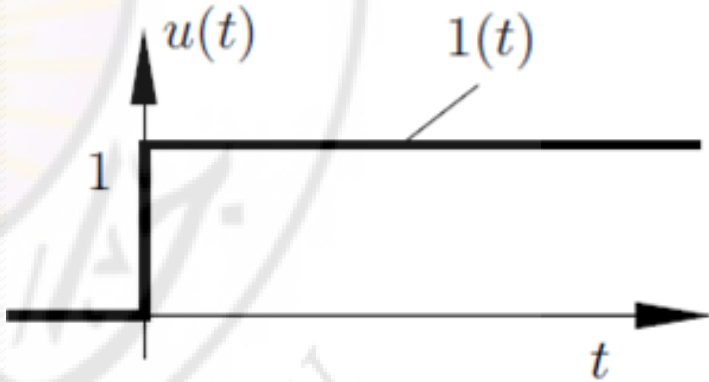


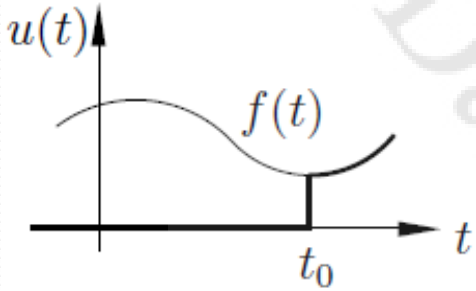
$$1(t-t_0)=\begin{cases}0 & \forall \quad t<t_0\\ 1 & \forall \quad t\geq t_0\end{cases}$$

$$1(t)=\begin{cases}0 & \forall \quad t<0\\ 1 & \forall \quad t>0\end{cases}$$

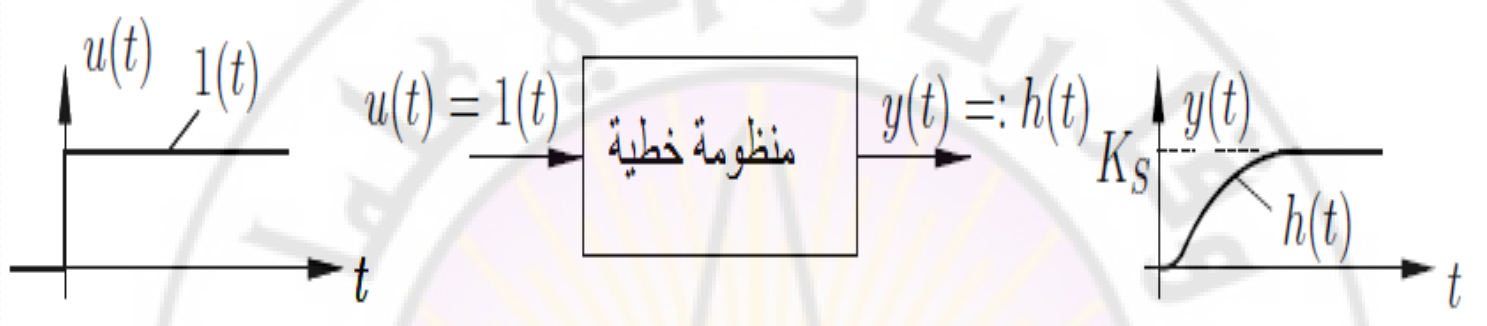


$$u(t)=u_0 1(t-t_0)=\begin{cases}0 & \forall \quad t<t_0\\ u_0 & \forall \quad t\geq t_0\end{cases}$$





$$u(t)=f(t)1(t-t_0)=\begin{cases}0 & \forall \quad t<t_0\\ f(t) & \forall \quad t\geq t_0\end{cases}$$



تعريف: إذا كانت منظومة ديناميكية ما في اللحظة $t=t_0$ خالية من الطاقـــة، أي أن جميـــع الشروط الابتدائية لمعادلتها التفاضلية صفرية، فإن استجابة المنظومة على تأثير تابع القفزة الواحدية $u(t)=1(t)$ يسمى استجابة القفزة أو تابع الانتقال $h(t)$

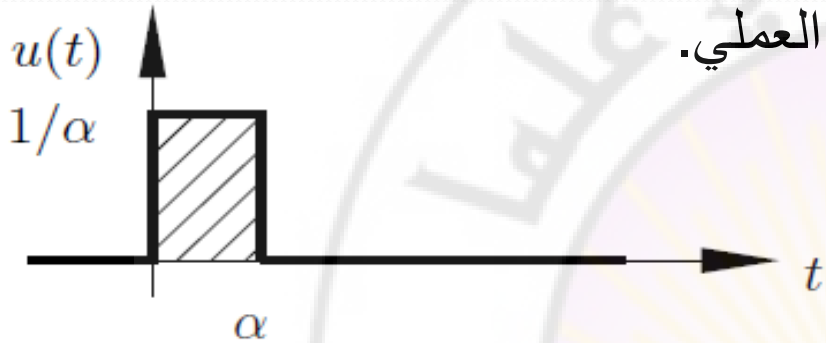
القيمة النهائية k_s تعبر عن التضخيم الستاتيكي للمنظومة

$$K_s = h(\infty) = \lim_{t\to\infty} h(t)$$

وإذا أثر تابع القفزة في لحظة زمنية أخرى $t=t_0$ عوضا عن $t=0$ ينزاح تابع الانتقال بالمقدار t_0 كذلك، ونعبر عن هذا بالعلاقة:

$$u(t) = u_0 1(t-t_0) \Rightarrow y(t) = u_0 h(t-t_0)$$

2. **تابع النبضة:** هو أحد أهم الإشارات التي تسمح بفهم طبيعة المنظومات، فهو مجرد أداة نظرية تقود إلى أفكار يعتمد عليها دوما في التطبيق العملي.



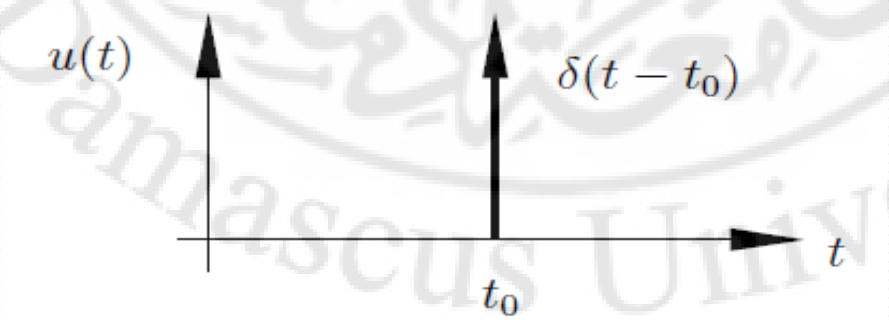
$$u(t) = \Delta(t) = \begin{cases} 0\,;\, 0 > t > \alpha \\ \dfrac{1}{\alpha}\,;\, 0 \le t \le \alpha \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{1}{\alpha}[1(t) - 1(t-\alpha)]$$

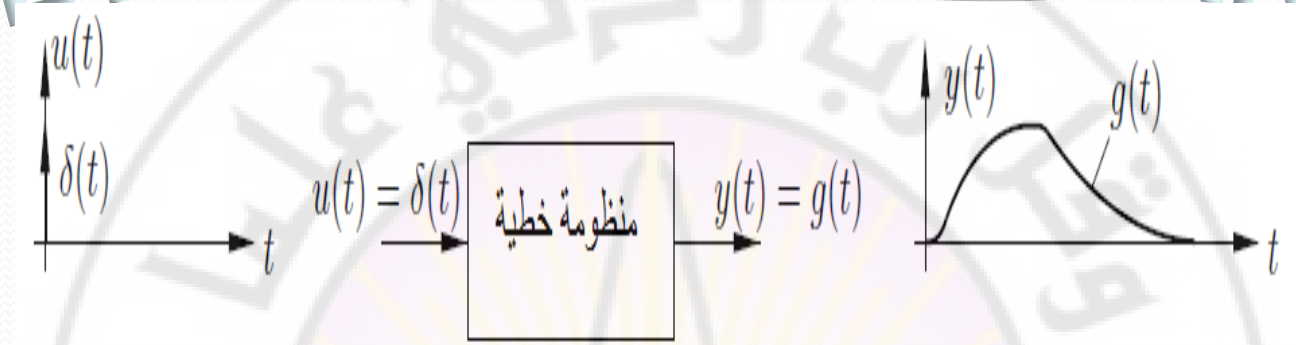
نبضة مستطيلة الشكل مدتها α وارتفاعها $1/\alpha$ مع مساحة معيارية قدرها 1.

يتحول تابع **النبضة في الحالة الحدية عندما** $\alpha \to 0$ **إلى تابع الدلتا Delta function**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\cdot dt = f(t_0)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta t \cdot dt = 1$$



تعريف: إن استجابة المنظومة الخطية على إشارة النبضة δ(t) تسمى استجابة النبضة أو تابع الثقل g(t)

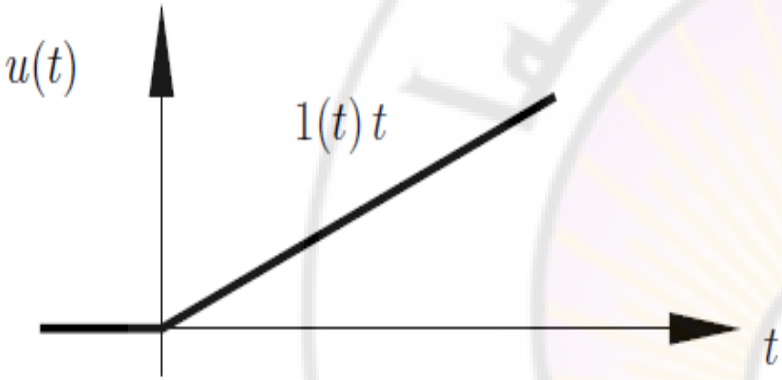
توجد بين تابع القفزة الواحدية 1(t) وبين تابع النبضة δ(t) العلاقة التالية:

$$\delta(t) = \frac{\partial}{\partial t} 1(t) \qquad 1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) \cdot d\tau$$

وتقابل هذه العلاقة علاقة مماثلة بين تابع الثقل g(t) وتابع الانتقال h(t) هي:

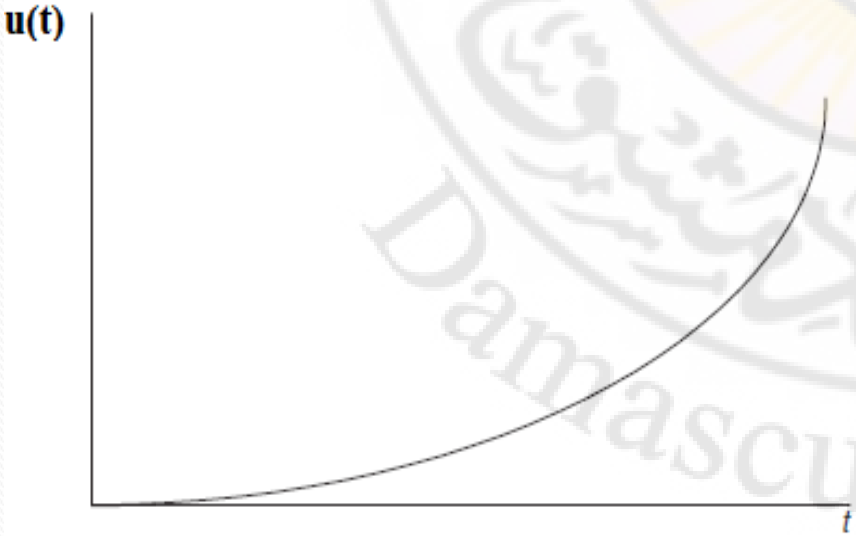
$$g(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial t}$$

3. **تابع الصعود Ramp function :** إشارة تابع الصعود هي تكامل تابع القفزة، وتستخدم في دراسة العديد من المنظومات الديناميكية



$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}1(\tau)d\tau=1(t)t$$

4. **التابع القطعي parabolic function :** تابع التسارع الثابت



$$x_i(t)=t^2;X_i(s)=\frac{2}{s^3}$$

$$x_i(t)=Kt^2;X_i(s)=\frac{2K}{s^3} \qquad t>0$$

5. **الإشارة الجيبية sinusoidal change:** وهي إشارة اختبارية تعطى بالشكل:

$$u(t) = u_0 \sin \omega_0 t$$

ويمكن التعبير عن هذه الإشارة الجيبية الواقعية اعتمادا على معادلة أويلر

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t = Re\{e^{j\omega_0 t}\} + j\, Im\{e^{j\omega_0 t}\}$$

من خلال القسم التخيلي في تابع عقدي كما يلي: $u(t) = u_0 \sin \omega_0 t = u_0\, Im\{e^{j\omega_0 t}\}$

وتتمثل استجابة المنظومة الخطية على هذا الدخل في إشارة خرج اهتزازية ذات مطال وصفحة ، تحدد النسبة بينهما و بين مطال وصفحة إشارة الدخل المميزات الديناميكية للمنظومة.